تحليل دور أمثلة المتعلمين التلقائية في البرهان الرياضي باستخدام نموذج تولمن: دراسة حالة لطالبات المرحلة الثانوية

Analysis of the Role of Student Generated Examples in Mathematical Proof Using the Toulmin Model: A Case Study of High School Students

إعداد

د. مريم موسى متى عبد الملاك

مدرس بكلية التربية بالوادي الجديد

جامعة الوادي الجديد

المستخلص:

هدف البحث الحالي إلى تحليل الدور الذي قد تؤديه أمثلة المتعلمين التلقائية في تعزيز قدرة طالبات المرحلة الثانوية على تطوير البراهين الرياضية. وكذلك التعرف على المعوقات التي قد تعيق طالبات المرحلة الثانوية من الاستفادة من الأمثلة في البرهان الرياضي. استخدم البحث الحالي تصميم دراسة الحالة. تكونت عينة البحث من اثنتي عشرة طالبة من طالبات المرحلة الثانوية. تم تقسيم الطالبات إلى ستة أزواج متعاونة، وتم إعطاء كل زوج ورقة نشاط واحدة للقيام بحلها معا. تم تحليل تفاعل أزواج الطالبات وحلولهن المكتوبة باستخدام نموذج تولمن للحجة. تمثلت أدوات جمع البيانات في مقابلات شبه مقننة قائمة على المهام، والملاحظات الميدانية، وأوراق عمل الطالبات. أوضحت النتائج خمسة أدوار رئيسة للأمثلة في مساعدة الطالبات على فهم وتطوير البرهان الرياضي. هذه الأدوار هي: فهم عبارة رياضية، تقييم صحة عبارة رياضية، التبرير بناء على ملاحظة الهياكل الرياضية، تعميم الفهم، دحض تخمين. كذلك كشفت النتائج عن بعض المعوقات التي أعاقت بعض الطالبات من الاستفادة من الأمثلة في فهم وتطوير البرهان. هذه المعوقات هي: استخدام أمثلة مؤكدة متنوعة، استخدام أمثلة تجريبية بطريقة عشوائية، عدم إدراك دور الأمثلة المضادة، القفز إلى الحلول الجبرية. في ضوء ما أسفرت عنه النتائج تم التوصية بضرورة أن يتلقى الطلاب في جميع المراحل الدراسية تعليمًا صريحًا حول كيفية التفكير الاستراتيجي في الأمثلة وتحليلها أثناء الأنشطة المتعلقة بالبرهان الرياضي.

Abstract:

The present research aimed to analyze the role that examples may play in enhancing the ability of high school students to develop mathematical proofs. As well as identifying the obstacles that might hinder high school students from benefiting from examples in the mathematical proof. The current research used case study design. The research sample consisted of twelve female high school students. The students were divided into six cooperating pairs, and each pair was given one activity sheet to solve it together. The interactions between students and their written solutions were analyzed using the Toulmin argument model. Data collection tools were semi-structured task-based interviews, field notes, and student worksheets. The results clarified five main roles that examples played in helping students to understand and develop the mathematical proof. These roles are: understanding a mathematical phrase, assessing validity of a mathematical phrase, justification based on observing mathematical structures, generalizing understanding, and refuting conjecture. The results also revealed some obstacles that hindered some students from benefiting from examples in understanding and developing the proof. These constraints are: the use of various confirmed examples, the use of experimental examples in a random manner, lack of awareness of the role of counterexamples, and jumping to algebraic solutions. In light of the findings, the research recommends that students at all levels of classes receive an explicit instruction on how to think strategically about examples and analyze them during proofing activity.

مقدمة:

يؤدي البرهان دوراً رئيساً في تعليم وتعلم الرياضيات، فقد أكد المجلس القومي لمعلمي الرياضيات(NCTM, 2000) أن البرهان هو لب الرياضيات حيث تمثل القدرة على البرهان عنصرا رئيسا في الفهم الرياضي؛ لأنه فقط عندما يمكن للفرد إعادة بناء الإجراء، وإثبات أنه يعمل، يمكن القول إنه قد فهمه. كذلك من خلال البرهان الرياضي، يتعلم الطالب سلسلة من الأفعال والإجراءات المتتابعة والتي تؤدي كل منها للذي يليه مما يكسبه المنطقية في جميع أفعال حياته ويجعله قادرا على تقديم التبرير لخطوة قام بها وتوضيح سبب نتيجة توصل إليها (صلاح، ٢٠١٢، ص٦).
ولذا أكد المجلس القومي لمعلمي الرياضيات (NCTM, 2000) أن تعليم الرياضيات في مراحل التعليم الأساسي والثانوي يجب أن يمكّن جميع الطلاب من التعرف على المنطق والبراهين كجوانب أساسية في الرياضيات، وتطوير وتقييم التخمينات الرياضية والحجج والبراهين الرياضية، واختيار واستخدام أنواع مختلفة من الاستدلال وطرائق البرهان. كذلك يطالب كل من علماء تعليم الرياضيات ومبادرات الإصلاح بأن يكون للبرهان دورأكثر مركزية في تعليم الرياضيات للطلاب في جميع المراحل الدراسية (Aricha-Metzer & Zaslavsky, 2019; Buchbinder & Zaslavsky, 2019; Ellis et al., 2012; Knuth et al., 2019). وعلى وجه الخصوص، يجب أن يؤدي البرهان دورا مركزيا في تعليم الرياضيات في المرحلة الثانوية حيث من أهم أهداف تدريس الرياضيات بالمرحلة الثانوية هو فهم البرهان الرياضي وتعلم أفكار البرهان الرياضي وطرائقه (روفائيل، عصام وصفي ويوسف، محمد أحمد، ٢٠٠١، ص ١٢٤). ومع ذلك، على الرغم من الاهتمام المتزايد والتركيز على البرهان في الرياضيات المدرسية، لا يزال يعاني طلاب المرحلة الثانوية من فهم وتطوير البرهان (إبراهيم، ٢٠١٨؛ غضبان، ٢٠١١؛ صلاح، ٢٠١٢؛ موسى، ٢٠١١).
وفي محاولة لتعزيز قدرة الطلاب على فهم وتطوير البراهين الرياضية، أولى الباحثون اهتماما كبيرا بالتفكير القائم على الأمثلة. هناك أدلة على أن علماء الرياضيات يرون أن استخدام الأمثلة يمثل عنصرا مهما في بناء البرهان (Lockwood, Ellis, & Lynch, 2016; Lockwood, Ellis, & Knuth, 2013; Lynch & Lockwood, 2019). فعندما يصادف عالم رياضيات عبارة غير واضحة، فإن الشيء "الطبيعي" الذي يتعين القيام به هو بناء مثال أو الاستعانة به من أجل رؤية عامة من خلال خبرة محددة (Bills et al., 2006). على سبيل المثال، وجد (Lynch & Lockwood, 2019) أن الرياضيين يستخدمون الأمثلة في الأغراض التالية: فهم ماذا (اختيار مثال لمعرفة كيف يعمل

التخمين)، فهم لماذا (محاولة استخدام مثال لفهم الآلية السببية وراء التخمين)، واختبار الحقيقة (استخدام مثال كاختبار لتحديد حقيقة التخمين). وقد أوضحت نتائج دراسة (Lockwood et. al., 2016)أن علماء الرياضيات يستخدمون الأمثلة لاكتساب نظرة ثاقبة حول كيفية تطوير البرهان، والتحقق من التخمين، سواء من حيث المعقولية أو للتأكد من أن التخمين قد يكون صحيحًا أم لا. كما وجد (Lockwood et al., 2013) أن علماء الرياضيات يستخدمون الأمثلة لاكتساب نظرة ثاقبة حول الموقف ويستخدمون الخصائص الرياضية للأمثلة في صياغة إثبات للتخمين. مما سبق يتضح استخدام علماء الرياضيات للأمثلة بهدف فهم وتطوير البرهان. وبالنظر إلى أن الطلاب لا يمتلكون الأدوات الرياضية والخبرات والمهارات ما وراء المعرفية التي يستخدمها علماء الرياضيات، فإن تحديد العلاقات الرياضية العامة قد يكون أكثر صعوبة لهم. وبالتالي، قد يكون من المفيد للطلاب أيضا التفكير باستخدام الأمثلة في أنشطة البرهان الرياضي.

وعلى وجه الخصوص، فإن أمثلة الطلاب التلقائية لها دور إيجابي في البرهان الرياضي (Sandefur Mason, Stylianides, & Watson, 2013). ويرى (Alcock & Weber, 2010) أن استخدام الأمثلة يمكن أن يكون مفيدًا إذا قام الطالب بتوليد الأمثلة بنفسه كأحد أدوات تحقيق غرض رياضي، مثل إثبات عبارة ما.

بل يعد تشجيع الطلاب على بناء أمثلتهم استراتيجية فعالة للتحول من البيئات التربوية المتمركزة حول المعلم إلى البيئات التربوية المتمركزة حول المتعلم (Bills et al., 2006). ويمنح بناء المتعلمين أمثلة خاصة بهم لمحة عن تفكيرهم ويسمح بدراسة ما قد يأتي بشكل طبيعي بالنسبة لهم، حتى يمكن البناء على هذا في سياقات أخرى أو مع متعلمين آخرين (Zaslavsky, 2019; Zaslavsky, 2014) . كذلك أمثلة الطلاب التلقائية تمكن المعلمين من اكتشاف أنواع الفهم التي تعكسها أمثلة المتعلمين (Bills et al., 2006). ويؤكد(Zaslavsky, 2014) أن إشراك المتعلمين في إنشاء أمثلة لمفهوم رياضي معين والتحقق منها خلال نشاط جماعي يعمل كمؤشر لفهم المتعلمين وكذلك كمحفز لتعزيز فهمهم. كما يمكن أن تشير الأمثلة التي يجلبها الطلاب أثناء الانخراط في البرهان ليس فقط إلى طريقة تعاملهم مع المهمة، ولكن أيضًا إلى معتقداتهم حول الترابط المنطقي بين الأمثلة والبرهان (Buchbinder & Zaslavsky, 2019).

وقد تعددت الدراسات الأجنبية التي ركزت على استخدام الأمثلة في البرهان الرياضي مثل دراسات كل من: (e.g., Aricha-Metzer, Zaslavsky, 2019; Alcock & Weber, 2010; Buchbinder & Zaslavsky, 2019; Ellis et al., 2019; Lockwood et al., 2016; Ozgur et al., 2019)، لكن هناك عدد قليل من الدراسات الأجنبية مثل: (Iannone, Inglis, Mejia-Ramos, Simpson, & Weber, 2011; Pedemonte & Buchbinder, 2011; Sandefur et al., 2013) وندرة من الدراسات العربية – على حد علم الباحثة – التي ركزت على دور الأمثلة في البرهان الرياضي. كذلك أظهرت الدراسات التي ركزت على دور الأمثلة في البرهان الرياضي نتائج متضاربة. على سبيل المثال، أظهرت دراسة (Sandefur et al., 2013) أن توليد الأمثلة أمر حيوي لإنتاج الطلاب الجامعيين للبرهان. على وجه التحديد، حيث ساعدت الأمثلة الطلاب على اكتساب نظرة ثاقبة لمشكلة البرهان وأدت إلى استخدام الوسائل التقنية المناسبة التي أدت إلى إنتاج برهان ناجح. على النقيض من ذلك، لم يجد (Iannone et al., 2011) ميزة كبيرة لتوليد الأمثلة مقارنةً بقراءة الحلول، في تطوير البراهين من قبل طلاب المرحلة الجامعية الأولى. كما وجد (Pedemonte & Buchbinder, 2011) أن الأمثلة ليست كلها مفيدة في تطوير البراهين؛ بعض الأمثلة كانت مفيدة فقط في تكوين التخمين، لكنها ففشلت في معرفة كيفية إثبات التخمين، بينما في بعض الحالات ساعدت الأمثلة الطلاب أيضًا على إثبات تخمينهم. توضح هذه النتائج المتضاربة الحاجة إلى مزيد من الأبحاث التي تركز على العلاقة بين أمثلة الطلاب التلقائية والبرهان الرياضي. وخاصة لا يُعرف سوى القليل عن كيفية تفكير طلاب المدارس الثانوية بالأمثلة، وما إذا كانت الأمثلة يمكن أن تدعم محاولات الطلاب لتطوير البراهين أم لا. بدون مثل هذا البحث والممارسات التعليمية المستنيرة ذات الصلة، من غير المرجح أن يطور معظم الطلاب القدرات اللازمة لاستخدام الأمثلة بطريقة منتجة في تعلم البرهان (Knuth et al., 2019) . ويؤكد (Alcock & Weber, 2010) أن مثل هذه الدراسات ضرورية من أجل تطوير الممارسات التعليمية التي تعزز تطوير تعلم الطلاب للبرهان.

ويركز البحث الحالي على الاستخدام التلقائي (على عكس التوجيه) للأمثلة من قبل طالبات المرحلة الثانوية أثناء مشاركتهن في المشكلات الرياضية التي تنطوي على البرهان الرياضي. وعلى وجه التحديد اهتم البحث الحالي بالدور الذي قد تسهم به أمثلة الطالبات التلقائية في فهم وتطوير وتبرير تخمينات رياضية يمكن أن تدعم تطوير البراهين الرياضية.

من أجل تحليل دور الأمثلة في البرهان، تم استخدام نموذج تولمن (Toulmin, 2003) للحجة. وترجع أهمية نموذج تولمن إلى أنه يسمح باستخدام الحجج غير الرسمية مثل الأمثلة والرسومات والمخططات والحجج الكلامية لإنتاج استنتاجات (Laamena, Nusantara, Irawan, & Muksar, 2018). ويتكون نموذج تولمن للحجة (Toulmin, 2003) من ثلاثة عناصر رئيسة: ادعاء Claim (النتيجة أو التأكيد الذي يحاول الطالب إثباته، أو هو الزعم الموجود عند الطالب)، ودليل Data (بيانات أو حقائق لدعم الادعاء)، ومبرر Warrant (تبرير الصلة بين الادعاء

والدليل) ، وثلاثة مكونات تكميلية: دعم Backing (الافتراض أو المبدأ أو الفكرة التي تدعم المبرر)، المؤهل Qualifier (درجة الثقة في الادعاء)، ودليل مضاد Rebuttal . تجدر الإشارة إلى أنه في أي حجة معينة، ليس بالضرورة نطق جميع هذه المكونات صراحة.

في ضوء ما سبق فقد اهتم البحث الحالي بتحليل دور أمثلة المتعلمين التلقائية في البرهان الرياضي وذلك باستخدام نموذج تولمن للحجة.

مشكلة البحث:

على الرغم من أهمية البرهان الرياضي كمفهوم أساسي في الرياضيات المدرسية، إلا أن هناك صعوبات يواجهها الطلاب في كيفية التعامل مع البرهان الرياضي. هذا ما تجمع عليه الدراسات العربية مثل (التخاينة، ٢٠١٨؛ الجوعاي؛ محمد، ٢٠١٣). كذلك يجمع عدد من الدراسات المحلية (إبراهيم، ٢٠١٨؛ غضبان، ٢٠١١؛ صلاح، ٢٠١٢؛ موسى، ٢٠١١) على وجود صعوبات تعليمية لدى طلاب المرحلة الثانوية في البرهان الرياضي. تتمثل الصعوبات التعليمية التي تواجه الطلاب أثناء تعلمهم البرهان الرياضي في عدم قدرة الطلاب على البرهان واستنتاج العلاقات الرياضية، وصعوبة في فهم المطلوب، وضعف قدرتهم على التعامل مع البرهان بالاستقراء الرياضي (هلال، ٢٠٠٧). فالطلاب لا يفهمون بشكل كاف طبيعة الأدلة والإثبات في الرياضيات ويواجهون صعوبة في تقديم مبررات وحجج سليمة منطقياً لدعم صحة التخمينات أو الادعاءات الرياضية (Kloosterman & Lester, 2004; Knuth, Choppin, & Bieda, 2009). كذلك يجد طلاب المرحلة الثانوية صعوبات تعليمية في تأدية البرهان الرياضي وتتبع مراحل الاستدلال والتفكير في البرهان، وعدم القدرة على تقديم الحجج المنطقية، ومشكلات في تحديد طريقة البرهنة للنظريات الرياضية (Yang, Lin & Wang, 2008) .

وقد شعرت الباحثة بتلك المشكلة من خلال:

١- ملاحظة الباحثة:

لاحظت الباحثة من خلال حضورها لبعض حصص الرياضيات في المرحلة الثانوية أثناء التدريب الميداني أن لدى الطلاب صعوبة في البرهان الرياضي ولا سيما في البرهان الجبري. فقد لاحظت الباحثة أن كثير من الطلاب يحفظون براهين النظريات دون الاهتمام بالبرهان الرياضي ويفتقرون القدرة على التحليل أو تطوير دليل أو حجة استنتاجية أو تبرير سليم. كذلك يوجد لدى الطلاب مشكلات في أداء المشكلات الرياضية التي تتطلب إثبات تعميم رياضي، والتأكد من صحته، وعدم قدرتهم على تقديم الحجج المنطقية. كذلك لاحظت الباحثة أن استخدام الأمثلة لا يحظى بالاهتمام الذي يجب أن يحظى به. فنادرا ما يستخدم المعلمون الأمثلة وإذا تم تقديم أمثلة على

المفاهيم الرياضية، فإن عرضهم يميل إلى أن يكون بين قوسين وموجز. وفي بعض الاحيان يتم توبيخ الطلاب لمحاولتهم الإثبات بالأمثلة.

٢- الدراسة الاستطلاعية:

لتدعيم الإحساس بالمشكلة، أجرت الباحثة دراسة استطلاعية عن طريق تطبيق اختبار في البرهان الرياضي على عينة من طالبات الصف الأول الثانوي (٣٠ طالبة) بمدرسة الثانوية بنات بمدينة الخارجة بمحافظة الوادي الجديد. تكون الاختبار من (٥) مسائل جبرية تتطلب إثبات علاقة رياضية ولكن لا تتطلب معرفة رياضية متخصصة (ملحق ١). كان متوسط النسبة المئوية لدرجات الطالبات يساوي (٤٥٪). مما يشير إلى تدني فهم الطالبات للبرهان الرياضي.

وبذلك تتحدد مشكلة البحث الحالي في تدني مستوى طالبات المرحلة الثانوية في البرهان الرياضي.

أسئلة البحث:

حاول البحث الإجابة عن السؤالين التاليين:

(١) ما الدور الذي قد تسهم به الأمثلة في مساعدة طالبات المرحلة الثانوية في فهم وتطوير البرهان الرياضي؟

(٢) ما المعوقات التي قد تعيق طالبات المرحلة الثانوية من الاستفادة من الأمثلة في فهم وتطوير البرهان الرياضي؟

أهداف البحث:

هدف البحث الحالي إلى تحليل الدور الذي قد تسهم به الأمثلة في تعزيز قدرة طالبات المرحلة الثانوية على فهم وتطوير البراهين الرياضية. وكذلك التعرف على المعوقات التي قد تعيق طالبات المرحلة الثانوية من الاستفادة من الأمثلة في فهم وتطوير البرهان الرياضي.

أهمية البحث:

تتمثل أهمية البحث الحالي في أنه قد يفيد:

١- معلمي الرياضيات: من خلال:

- زيادة وعي المعلمين بدور الأمثلة في البرهان الرياضي.
- زيادة وعي المعلمين بنقاط القوة والضعف لدى الطلاب فيما يتعلق باستخدام الأمثلة في البرهان الرياضي.
- تطوير الممارسات والأنشطة التعليمية التي تشجع الطلاب على تجربة وتقدير الأمثلة في محاولتهم للبرهان الرياضي.

٢- المتعلمين: من خلال:

- مساعدة الطلاب في إثراء فهمهم للبرهان الرياضي.

- تشجيع الطلاب على بناء أمثلتهم بما يساعدهم على فهم وتطوير وتبرير تخمينات رياضية يمكن أن تدعم تطوير البراهين الرياضية.

٣- القائمين على تخطيط وتطوير مناهج الرياضيات المدرسية: من خلال:

- زيادة وعي مصممي المنهج بدور الأمثلة في البرهان الرياضي.
- تصميم مناهج الرياضيات بما يأخذ في الاعتبار الأدوار المختلفة للأمثلة في البرهان الرياضي.

٤- الباحثين في تدريس الرياضيات: من خلال:

- فتح المجال أمام الباحثين لإجراء بحوث ودراسات متعلقة باستخدام الأمثلة في البرهان الرياضي.
- فتح المجال أمام الباحثين لإجراء بحوث ودراسات متعلقة باستخدام نموذج تولمنلتحليل الحجة.

حدود البحث:

اقتصر البحث على الحدود الآتية:

- مجموعة من طالبات الصف الأول الثانوي بمدرسة نجيب محفوظ الثانوية بنات بمدينة الخارجة محافظة الوادي الجديد (محل إقامة الباحثة).
- مشكلات جبر مفتوحة النهاية لا تتطلب معرفة رياضية متخصصة.
- الفصل الدراسي الأول للعام الدراسي ٢٠٢٠/٢٠١٩.
- تحليل دور أمثلة الطالبات التلقائية في البرهان باستخدام نموذج تولمن.

مصطلحات البحث:

تبنى البحث المصطلحات الإجرائية التالية:

الأمثلة:

يلتزم البحث الحالي بتعريف (Sandefur et al., 2013) لمصطلح الأمثلة على أنها عبارة عن كائنات رياضية ينوي المنشيء إنشاء مثيل لها في بعض الخصائص أو الظواهر الرياضية لإثبات شيء ما (ص ٣٢٤).

أمثلة الطلاب التلقائية:

تعرف أمثلة الطلاب التلقائية إجرائيا بأنها الأمثلة التي يولدها الطلاب بشكل عفوي بدون توجيه من المعلم.

البرهان الرياضي:

يعرف البرهان الرياضي إجرائيا بأنه عملية تهدف إلى إثبات أو تبرير صحة عبارة أو علاقة رياضية.

نموذج تولمن:

نموذج تولمن هو نموذج يستخدم لتحليل الحجة غير الرسمية مثل الأمثلة، ويتكون من ثلاثة عناصر رئيسة: ادعاء، ودليل، ومبرر، وثلاثة مكونات تكميلية: دعم، والمؤهل، ودليل مضاد.

منهج البحث:

استخدم البحث الحالي تصميم دراسة الحالة، ويتميز تصميم دراسة الحالة بالآتي:

- التركيز على العمليات والتي بها كان للمعالجة التأثير الذي أحدثته، بدلا من التركيز على النتائج (Merriam, 1998) .
- دراسة الظاهرة كما تحدث في سياقها الطبيعي مما يؤدي إلى ملاحظة السلوك الفعلي للمشاركين (McMillan, 2008).
- تقديم وصف غني للظاهرة قيد الدراسة ونظرة ثاقبة على تفرد معنى الأحداث والإجراءات من خلال استخدام مصادر معلومات غنية ومتنوعة (Yin, 2009).

ويمكن أن تكون دراسة الحالة عبارة عن تصميمات مفردة أو متعددة الحالات. وقد استخدم البحث الحالي دراسة الحالة المتعددة Multiple case study. في دراسة الحالة المتعددة، حيث يدرس الباحث حالات متعددة لفهم الاختلافات والتشابهات بين الحالات حيث يتم مقارنة الاستنتاجات المستمدة من حالة فردية ومقارنتها بالنتائج المتولدة من حالة أو حالات أخرى (Yin, 2009) . تعمل الحالات المتعددة على تقوية النتائج عن طريق تكرار نمط (أو أنماط) معين بين الحالات، وبالتالي زيادة الثقة في قوة النتائج (Yin, 2009).

عينة البحث:

تمثلت عينة البحث في ١٢ طالبة من طالبات المرحلة الثانوية بمدرسة نجيب محفوظ الثانوية بنات بمدينة الخارجة محافظة الوادي الجديد. تم اختيار الطالبات بناء على رغبتهن في المشاركة في البحث. في بداية العام الدراسي، أوضحت الباحثة الهدف من البحث لجميع طالبات الصف الأول الثانوي بمدرسة نجيب محفوظ، ودعتهن للاشتراك في البحث. أعربت ١٢ طالبة (من أربعة فصول مختلفة) عن رغبتهن في المشاركة في البحث. تم تقسيم الطالبات إلى أزواج من اختيارهن، وبذلك تم الحصول على ٦ أزواج من الطالبات والتي لم يتم تغيرها طوال فترة البحث. والهدف من تقسيم الطالبات إلى أزواج هو خلق فرص للاتصالات اللفظية والتبرير والاقناع العفوي.

أدوات جمع البيانات:

تم إعداد واستخدام أدوات جمع البيانات التالية:

١- مقابلات شبه مقننة قائمة على المهام Semi- Structure Task-Based Interviews:

تم جمع البيانات من خلال المقابلات شبه المقننة القائمة على المهام. تضمنت المقابلات ٦ مهام تشجع التخمين والبرهان (ملحق ٢). وتم تصميم المهام بحيث: (١) تتطلب استخدام الأمثلة، (٢) تثير الشك وعدم اليقين حول ما إذا كان التخمين صحيحا أو خطأ أو حول طريقة الحل (Zaslavsky, Nickerson, Stylianides, Kidron, & Winicki-Landman, 2012)، (٣) تكون غير مألوفة للطالبات وغير واضحة لهن على الفور(Buchbinder & Zalsavshy, 2013)، وذلك بهدف إثارة عدم اليقين، وإثارة محاولات الطالبات لإقناع بعضهن البعض من خلال الجدال، (٤) لا تتطلب أي معرفة رياضية متخصصة.

تم عرض مهام المقابلات على مجموعة من أساتذة المناهج وطرق تدريس الرياضيات، وموجهي ومدرسي الرياضيات، لإبداء آرائهم من حيث مدى صحة المهمة من الناحية العلمية واللغوية، ومدى مناسبتها لمستوى طلاب الصف الأول الثانوي. وقد تم إجراء التعديلات في ضوء أراء المحكمين. كذلك تم تطبيق مهام المقابلة على ٣٥ طالبة من طالبات الصف الأول الثانوي بمدرسة الثانوية بنات بالخارجة، وتم حساب الثبات عن طريق معادلة الفا كرونباخ. والذي وجد أنه يساوي (٠.٨).

عملت الطالبات في أزواج لحل المهام خلال جلسة استغرقت حوالي ساعة ونصف. وتم مقابلة كل زوج على حدة في مكتبة المدرسة أثناء حصص الاقتصاد المنزلي. وطُلب من الطالبات التحدث بصوت عالٍ أثناء حلهن للمهام، وشرح عملية تفكيرهن، وكتابة حلولهن، بما في ذلك الأمثلة التي يستخدمنها. وتم تسجيل كل المقابلات صوتيا. تم نسخ التسجيل الصوتي للمقابلات كلمة بكلمة، وتحليلها باستخدام نموذج تولمن.

٢- الملاحظات الميدانية:Field Notes

تم استخدام الملاحظات الميدانية لدعم البيانات التي تم جمعها من المقابلات، والملاحظات الميدانية عبارة عن تسجيل كل ما يلاحظه الباحث أثناء عملية جمع البيانات، كما تتضمن تفسيرات الباحث وتأملاته حول ما لاحظه، وأفكاره، وانطباعاته بهدف بناء الفهم (Yin, 2009; McMillan, 2008) . وفي البحث الحالي، قامت الباحثة بتدوين ملاحظات تأملية مباشرة عقب كل مقابلة مع أزواج الطالبات (ملحق ٣). اشتملت المذكرات الميدانية على ملاحظات الباحثة حول كيفية استخدام الطالبات للأمثلة ونجاحهن أو فشلهن في استخدام الأمثلة لإثبات التخمين المعطى، وما ساعدهن على الاستخدام الناجح للأمثلة، وما أعاقهن عن استخدام الأمثلة بنجاح.

٣- أوراق عمل الطالبات.

تم استخدام أوراق عمل الطالبات المكتوب بمثابة مصدر إضافي للبيانات. أثناء المقابلات تم إعطاء كل زوج من الطالبات ورقة نشاط تتضمن المهام وطُلب منهن التعاون في حل المهام. تم جمع أوراق النشاط في نهاية كل مقابلة وفحصها من أجل تحليل دور الأمثلة في البرهان.

خطوات البحث وإجراءاته:

١- الاطلاع على البحوث والدراسات والادبيات التي تناولت استخدام الأمثلة في البرهان الرياضي، ونموذج تولمن، والبرهان الرياضي.
٢- إعداد مهام المقابلات، والتأكد من صدق وثبات المهام.
٣- اختيار مجموعة البحث.
٤- إجراء مقابلات مع الطالبات موضع البحث خارج الفصل، وتكليفهن بحل المهام في أزواج، والتسجيل الصوتي لهذه المقابلات، وتدوين الملاحظات الميدانية.
٥- نسخ مقابلات الطالبات.
٦- تحليل البيانات (المقابلات، الملاحظات الميدانية، أوراق عمل الطالبات) باستخدام نموذج تولمن للحجة.
٧- تفسير النتائج، وتقديم التوصيات والمقترحات.

الإطار النظري:

البرهان الرياضي:

يعرف البرهان الرياضي على أنه تعليل منطقي لصحة عبارة رياضية أو علاقة رياضية بالاستناد إلى مجموعة من البديهيات (العنزي، ٢٠١٩)، ويعرفه (التخاينة، ٢٠١٨، ص ٨٦) بأنه سلسلة من التقارير المتصلة والموجهة نحو إثبات صحة استنتاج، وكل تقرير يمكن تبريره بالإشارة إلى تعميمات سابقة متعارف عليها وموثوق بصحتها. كما يعرف (صلاح ،٢٠١٢) البرهان الرياضي بأنه استخدام الدليل المنطقي لبيان أن صحة عبارة تنتج من صحة عبارات سابقة لها أو من مسلمات. ويعرف البرهان الرياضي إجرائيا بأنه عملية تهدف إلى إثبات أو تبرير صحة عبارة أو علاقة رياضية.

ويحظى البرهان الرياضي بأهمية كبيرة في عمليتي التعليم والتعلم لأسباب عديدة. يساعد البرهان الرياضي الطلاب على الفهم العميق للمشكلات والتوصل لحلها عن طريق اتباع خطوات استدلالية تحكمها قوانين المنطق (الخطيب، ٢٠١٢). كما يساعد البرهان الرياضي على إكساب الطلاب أساليب متنوعة من التفكير تدعمهم في اكتشاف الجديد وتغرس في نفوسهم دافعية تعلم المزيد مما ينعكس إيجابيا على قدرتهم

على الوصول إلى مستويات عليا من التفكير (العنزي، ٢٠١٩). كذلك تظهر أهمية البرهان في تكوين طالب قادر على التفكير الناقد والإبداعي وقادر على التفسير والتعليل والتأكد من صحة المعلومات وتكوين بنيات عقلية رياضية (التخاينة، ٢٠١٨). وذلك لأن البراهين الرياضية لا تحقق صحة المبادئ والعلاقات فحسب، بل توفر أيضا شواهد جديدة تساعد الطلاب على استيعاب القوانين المنطقية وتذكر المفاهيم والمبادئ الرياضية، وذلك عن طريق بناء العلاقات بينها (صلاح، ٢٠١٢). وذلك بأن ينمي ويطبق الطالب مهارات الحجية وتقديم أمثلة إيجابية تحقق علاقة ما وأخرى مضادة للتدليل على عدم صحة علاقات وتخمينات مفترضة (الهيئة القومية لضمان جودة التعليم والاعتماد، ٢٠٠٩، ص٤).

كذلك يحظى البرهان الرياضي باهتمام كبير في المرحلة الثانوية، فقد جاء في وثيقة المعايير القومية للرياضيات للتعليم قبل الجامعي الصادرة عن الهيئة القومية لضمان جودة التعليم والاعتماد في مصر (٢٠٠٩) أنه يجب أن ينمي طالب المرحلة الثانوية القدرة على التعليل لخطوات الحل والتفكير باستخدام التعليل الاستقرائي والاستنباطي، كما يقوم بتخمينات ويقيمها ويعطي تبريرات صحيحة تدعم سلامة استنتاجه. كذلك تؤكد المعايير العالمية على ضرورة أن تتضمن أهداف تعليم الرياضيات في المرحلة الثانوية: أن يقدم الطالب الدليل على صحة إجاباته، وتعليلا لخطوات حل مسألة، وأدلة على خطأ علاقة غير صحيحة، وأن يستخدم الطالب الاستقراء والاستدلال في اثبات صحة علاقات رياضية (عبيد، ٢٠٠٤). كما اشارت معايير الأداء في الرياضيات بجورجيا (Georgia Department of Education, 2006) إلى ضرورة تنمية قدرة طالب المرحلة الثانوية على إدراك أهمية التفكير والبرهان كمظاهر أساسية للرياضيات، وبناء تخمينات رياضية والتحقق منها، وتطوير وتقييم براهين وحجج رياضية. وتبرز هذه التوصيات أهمية البرهان الرياضي وتؤيد وجوده كنشاط مهم في الرياضيات في المرحلة الثانوية.

ويختلف الباحثون في تحديد مهارات البرهان الرياضي. فقد حددها (الخطيب، ٢٠١٢) في أربع مهارات رئيسة وهي: (١) فهم العبارات والعلاقات الرياضية، (٢) ربط مكونات العبارات أو العلاقات الرياضية وتحليل العلاقات بينها، (٣) إصدار حكم على صحة (أو خطأ) العبارة أو العلاقة الرياضية، (٤) تقديم تعليل منطقي على صحة (أو خطأ) العبارة أو العلاقة الرياضية. ووصف (Laamena et al., 2018) خمس مهارات للبرهان الرياضي: (١) التحقق (الانتباه لصحة العبارة)، (٢) التفسير (فهم لماذا العبارات صحيحة)، (٣) التنظيم المنهجي (تنظيم النتائج المختلفة في أنظمة استنتاجية منطقية)، (٤) الاكتشاف (ابتكار نتائج جديدة)، (٥) الاتصال (نشر المعرفة الرياضية). وقدم (Mejía-Ramosa & Inglish, 2008) ثلاث مهارات أساسية للبرهان الرياضي: (١) البناء، الذي يتألف من استكشاف المشكلة، وتقدير حقيقة

التخمين وتبرير حقيقة الادعاء، (٢) القراءة، والذي يتكون من قراءة شاملة للأدلة وتقييم الأدلة، (٣) التقديم، تتألف من إقناع الجمهور بالادعاء، وشرح سبب صواب أو خطأ الادعاء، وإثبات صحة الحجة.

استخدام الأمثلة في البرهان الرياضي:

من المنظور الرياضي، غالبًا ما يُعتبر المثال كائنًا يفي بشروط معينة أو ممثل فئة (Zaslavsky, 2019). يذكر (Zaslavsky, 2014) أن مصطلح المثال يشير إلى كائن رياضي يمكن للمرء من خلاله الإجابة عن السؤال: " هذا مثال لماذا؟" هذا يعني أن الشخص يجب أن يكون قادرا على توضيح الخصائص أو المبدأ أو المفهوم أو الفكرة التي يمثلها المثال. مع ملاحظة أن أي مثال يحمل بعض السمات التي يُقصد منها أن تكون مثالًا وغيرها من الخصائص غير ذات الصلة. يلتزم البحث الحالي بتعريف (Sandefur et al., 2013) لمصطلح الأمثلة على أنها عبارة عن كائنات رياضية ينوي المنشيء إنشاء مثيل لها في بعض الخصائص أو الظواهر الرياضية لإثبات شيء ما (ص ٣٢٤). يمكن اعتبار استخدام الأمثلة جزءًا ضمنيًا من التفكير الاستقرائي الذي يبدأ عمومًا بحالات خاصة للحصول على أكبر قدر من المعلومات، فعلى الرغم من أن البرهان يتطلب شكلًا خاصًا من التفكير المنطقي الاستنتاجي، إلا أن هناك حاجة أيضًا إلى التفكير الاستقرائي (Laamena et al., 2018) .

هناك نمطان للأمثلة: الأمثلة التجريبية، والأمثلة العامة. الأمثلة التجريبية تعني تجربة أمثلة للتحقق مما إذا كان التخمين يبدو صحيحا، أو الحالات التي قد ينجح فيها، مع التركيز على تفاصيل المثال دون النظر إلى التفاصيل بطريقة عامة (Aricha-Metzer & Zaslavsky, 2019). وقد تساعد الأمثلة التجريبية في التخمين وفي بناء حدس فيما يتعلق بصحة التخمين. ومع ذلك، إذا كان الدليل التجريبي هو المصدر الوحيد للاقتناع، واستعيض به عن الحجج القابلة للتطبيق التي تدعم التخمين وتوفر مبررًا لصحته، فيعتبر الاعتماد المفرط على الأمثلة التجريبية غير مرغوب فيه (Aricha-Metzer & Zaslavsky, 2019). على النقيض من المثال التجريبي، في المثال العام، يرى المرء من خلال التفاصيل بعض الحالات العامة. هذا لا يعني بالضرورة أن المرء يرى البنية الكاملة أو فكرة الإثبات من خلال المثال العام. يشتمل المثال العام على توضيح أسباب صدق التأكيد عن طريق العمليات أو التحويلات على كائن ليس موجود في حد ذاته، ولكن كممثل مميز لفئته (Aricha-Metzer & Zaslavsky, 2019). بهذا المعنى، يمكن اعتبار المثال العام كجسر للطلاب، لأنه قد يساعدهم على الانتقال من وجهات النظر التجريبية والحدس المضلل إلى قناعة يمكن تبريرها وفهم سبب صحة (أو خطأ) العلاقة الرياضية. وبالتالي، في حين أن الاستخدام التجريبي للأمثلة قد يساعد في الحصول على شعور بديهي بما إذا كان

التخمين صحيحًا أم لا، لكنه لا يقدم نظرة ثاقبة حول سبب صدقه أو لا، إلا أن استخدام المثال العام قد يسهل (رغم أنه قد لا) فهم لماذا (أو لماذا لا) العبارة الرياضية صحيحة (Aricha-Metzer & Zaslavsky, 2019) .

وفي الآونة الأخيرة، أصبح استخدام الأمثلة ومساهمتها في التعلم والفهم موضوعًا رئيسا في العلوم التربوية. ينبع الاهتمام المتزايد بالأمثلة من الدور المركزي الذي تلعبه الأمثلة في التعلم والتدريس بشكل عام وفي الرياضيات والتفكير الرياضي بشكل خاص (Zaslavsky, 2019). ويعد استخدام الأمثلة جزءًا لا يتجزأ من تخصص الرياضيات وليس مجرد مساعدة للتعليم والتعلم (Bills et al., 2006) . وما يجعل الأمثلة مهمة هو أنها تقع في فهم الشخص وتعمل كوسيلة للاتصال بالأفكار المجردة؛ فاستخدام الأمثلة يساعد الطلاب على رؤية العام من خلال الخاص والوصول إلى الحجج الاستنتاجية (Zaslavsky, 2019) . فكل مثال يصبح حاملاً لفكرة مجردة عندما يرى شخص ما أنها حالة عامة، ورؤية ما هو أبعد من الخاص، بتجاهل تفاصيل المثال ومن خلال الانتباه إلى بنيته الأساسية، قد يكون من الممكن تحديد القاعدة العامة لإنشاء أمثلة أخرى تحتوي على نفس الميزات، وكذلك لتحديد العلاقات بين الحالات المماثلة (Pedemonte & Buchbinder, 2011) . كما يمكن أن تكون الأمثلة مفيدة لاكتساب نظرة ثاقبة للتخمين (إما فهم سبب كون التخمين صحيحًا أو رؤية عنصر هيكلي في الأمثلة)، وتعميم تلك الرؤى على الحالات الأوسع، ودعم تطوير التخمين (عبر مراجعة الحدس الحالي أو تطوير تخمين جديد)، ودعم تطوير التبرير (إما في شكل برهان متاح ولكن غير كامل أو في شكل برهان كامل) (Ozgur et al. , 2019). واوضح (Ellis et al., 2019) أن تمكن الطلاب من التفكير بأمثلة مكّنهم من التعرف على سبب كون التخمين صحيحًا وتحديد الهياكل الرياضية الشائعة عبر الأمثلة وتعميم تلك الهياكل لتطوير حجج أوسع نطاقًا تتجاوز الأمثلة المحددة التي استخدموها. على وجه الخصوص، مطالبة الطلاب ببناء أمثلة خاصة بهم يعد أداة قوية في تعليم الرياضيات حيث توفر الأمثلة "نافذة" إلى عقل المتعلم التي يمكن أن تكشف وتعزز جوانب مهمة من المفاهيم (Antonini, Presmeg, Mariotti, & Zaslavsky, 2011).

وعلى وجه الخصوص، هناك علاقة وثيقة بين الأمثلة والبرهان الرياضي. ويذكر (Antonini et al., 2011; Knuth et al., 2019; Lockwood et al., 2016) أن التفكير القائم على المثال يمكن أن يؤدي دورًا أساسيًا وضروريًا في تطوير واستكشاف وفهم التخمينات، وكذلك في المحاولات اللاحقة لتطوير براهين على تلك التخمينات. كذلك يؤكد (Leron & Zaslavsky, 2013) أن التفكير القائم على المثال يمكن أن يسهل عمليات التخمين والإثبات، وعلى وجه الخصوص، يمكن أن يساعد استخدام الأمثلة العامة في فهم الأفكار الرئيسة للبرهان. إن الاستخدام المثمر

للأمثلة يؤدي إلى فهم أعمق للتخمين والرياضيات الأساسية، ونظرة ثاقبة فيما يتعلق بتطوير دليل، وإدراك التعميم أو الهيكل باستخدام مثال عام (مثال محدد يمكن من خلاله رؤية الحالة العامة)، وتوليد مثال مضاد، وتطوير تخمين جديد أو منقح، أو تقدير الحاجة إلى إثبات (Knuth et al., 2019). فالوقت الذي يقضيه الطالب في تحليل أمثلة معينة يمكن أن يوفر ليس فقط فهمًا أعمق للتخمين، ولكن أيضًا نظرة ثاقبة لتطوير البرهان (Ellis et al., 2012) . وذلك لأن استخدام الأمثلة يساعد على اكتساب نظرة أولية حول سبب كون التخمين صحيحًا أو خاطئًا، وتحديد بنية عامة من حالة واحدة، وإنتاج التعميم (Lynch & Lockwood, 2019). وعلاوة على ذلك، استخدام المثال يقدم رؤى رياضية أساسية يمكن للطلاب الاستفادة منها في الانتقال من استخدام المثال إلى حجة استنتاجية (Ellis et al., 2019).

لذلك يجب أن يتعلم الطلاب استخدام الأمثلة بشكل منتج في الأنشطة المتعلقة بالبرهان، وتحليل الأمثلة بطريقة تحليلية وعامة، ليس فقط من أجل اكتساب فهم أفضل للتخمينات (أو العبارات)، ولكن أيضا من أجل تعلم تطوير البراهين (Aricha-Metzer & Zaslavsky, 2019). كذلك يجب على المعلمين إتاحة الفرصة للطلاب لاستخدام الأمثلة في البرهان الرياضي وتشجيعهم على ذلك. يؤكد (Ozgur et al. , 2019) أن إتاحة الفرصة أمام الطلاب لتجربة الاستفادة من الأمثلة في البرهان قد يسهل استخدام الطلاب المثمر للأمثلة عند تطوير دليل. كما وجد (Sandefur et al., 2013) أن توليد الأمثلة لعب دورا بنّاءً في عملية البرهان عندما كان لدى الطلاب خبرة في فائدة الأمثلة في البرهان. وبالتالي، لدعم تعلم الطلاب للبرهان، يحتاج المعلمون أولاً إلى جعل الطلاب يقدرون قيمة الأمثلة في البرهان. ومع ذلك، يجب توخي الحذر حتى لا ينظر الطلاب إلى الأمثلة على أنها تشكل دليلًا أو بديلاً صالحًا للإثبات (Lockwood et al., 2016) .

يمكن أن تلعب الأمثلة أدوارا مختلفة في البرهان. حيث يذكر (Laamena et al., 2018) أن الأمثلة يمكن أن تكون بمثابة: أداة استكشاف (لفهم العبارات الرياضية)، وأداة للبحث والتبرير (لبحث وتقدير حقيقة التخمين وتبرير حقيقة الادعاء)، وأداة للأقناع (لاختبار النتائج التي تم الحصول عليها، وللتحقق من صحة الادعاء). كما وجد (Lynch & Lockwood, 2019) أن الأمثلة ساعدت طلاب المرحلة الثانوية فيما يلي: فهم ماذا (استخدام الأمثلة لفهم عبارة التخمين)، واختبار الحقيقة (استخدام الأمثلة لاختبار ما إذا كان التخمين صحيحا)، وفهم السبب (استخدام الأمثلة لاكتساب نظرة أولية حول سبب كون التخمين صحيحًا أو خاطئًا)، الدحض، ملاحظة العنصر الهيكلي، إنتاج تعميم أو تخمين، دعم التبرير (إنتاج دليل)، دعم التخمين (تخمين جديد). كما وجد (Ellis et al., 2019; Ozgur et al. , 2019) أن الطلاب (طلاب المرحلة الإعدادية، والثانوية، والجامعية) الذين نجحوا في البرهان ساعدتهم

الأمثلة على: فهم لماذا كان التخمين صحيحا (أو خطأ)، ملاحظة عنصر هيكلي، تعميم فهمهم، تعديل التخمين المعطى، توليد تخمين جديد، إثبات التخمين، إنتاج برهان. ووجد (Ellis et al., 2012) أن الأمثلة ساعدت طلاب المرحلة الإعدادية فيما يلي: التحقق من صحة التخمين، دعم حجة عامة، دحض التخمين، إقناع المرء أو غيره بأن التخمين يجب أن يكون صحيحًا، تبرير حقيقة التخمين. ووجد (Alcock & Weber, 2010) أن الأمثلة ساعدت طلاب المرحلة الجامعية في فهم عبارة رياضية، تقييم صدق تأكيد، بناء مثال مضاد، توليد برهان.

من الأمور التي تساعد على الاستخدام الناجح للأمثلة في البرهان هو ملاحظة الهيكل الرياضي للعبارات الرياضية (Ozgur et al. , 2019). ويقصد بالهيكل الرياضي كيفية ارتباط العناصر والتعبيرات الرياضية ببعضها البعض. يمكن ملاحظة هذه الهياكل الرياضية والعلاقات التي تميز التجريدات الرياضية من خلال المقارنة وملاحظة الاختلافات والتفكير في الأمثلة التي تم انشاؤها (Watson & Shipman, 2008). لقد وجدت الدراسات التي تبحث دور الأمثلة في فهم التخمينات أن تحليل أوجه التشابه الهيكلية عبر الأمثلة يمكن أن يدعم تطوير البرهان (Pedemonte & Buchbinder, 2011). فقد وجد (Sandefur et al., 2013) أن الأمثلة ساعدت الطلاب على ملاحظة الهياكل الرقمية وبعد ذلك استطاع الطلاب اقتراح الخصائص من خلال تحليل الأمثلة. ولذلك فإن الأفراد بحاجة إلى مقارنة الأمثلة المتشابهة بهدف التعرف على الهياكل الرياضية، والتفكير في استخدامهم للأمثلة والنظر في آثار الاختلافات التي قاموا بها في توليد أمثلتهم (Watson & Shipman, 2008). وفقا لذلك، فإن استخدام المثال الموجه نحو الهدف، والذي يهدف إلى إيجاد هياكل رياضية عبر الأمثلة التي تم إنشاؤها، يولد علاقات معرفية لتطوير البراهين (Ozgur et al. , 2019). وبهذا لكي يتم استخدام الأمثلة بشكل مثمر في البرهان الرياضي يجب استخدامها بشكل هادف واستراتيجي (Ozgur et al. , 2019). يؤكد (Zaslavsky & Knuth, 2019) أن الطلاب القادرين على التفكير الاستراتيجي واستخدام الأمثلة بطريقة منتجة أثناء مشاركتهم في الأنشطة المتعلقة بالبرهان (على سبيل المثال، تطوير التخمينات واستكشاف التخمينات وتبرير التخمينات ودحض التخمينات) لن يكتسبوا فهمًا أعمق للرياضيات الأساسية فحسب، بل يتعلمون أيضًا تطوير البراهين بنجاح. ولذا يجب أن يشجع معلمو الرياضيات طلابهم باستمرار على محاولة تمييز العناصر الهيكلية في أمثلهم، واستخدام الأمثلة بشكل استراتيجي هادف. وخاصة، إن فشل الطلاب في التفكير الاستراتيجي في الأمثلة وتحليلها عند الانخراط في أنشطة مرتبطة بالإثبات يعد عاملاً مساهماً حاسماً في صعوباتهم في تعلم البرهان (Knuth et al., 2019).

كما تتضمن أنشطة التخمين والبرهان من خلال الأمثلة فعل التعميم. وحدد الباحثون أنواعًا مختلفة من التعميمات على رأسها التعميمات التجريبية والتعميمات الهيكلية. التعميمات الذي يتم التوصل إليها من خلال عدد صغير من الحالات أو الملاحظات - بناءً على شكل النتائج أو العلاقات المرصودة - تعتبر تعميمات تجريبية (Ozgur et al. , 2019). في حين أن التعميمات التي تتم بناءً على أمثلة يتم التعامل معها على أنها ممثل عام لفئة، مع التركيز على المعاني أو الهياكل أو الخواص الأساسية، تعتبر تعميمات هيكلية (Ozgur et al. , 2019). تلعب التعميمات التجريبية دورا أقل أهمية من التعميمات الهيكلية فيما يتعلق بالبرهان الرياضي، حيث إن التعميمات التجريبية لا تقدم نظرة ثاقبة لماذا يجب أن يكون التخمين صحيحًا (Ozgur et al. , 2019). وأكد (Pedemonte & Buchbinder, 2011) على أهمية الاهتمام بالتعميمات الهيكلية عند البرهان، مشيرين إلى أن استخدام الطلاب للأمثلة قد يؤدي إلى تعميمات تستند إلى نتائج الأمثلة، دون فهم الهيكل الأساسي، هذا قد يكون كافيا لتطوير التخمين، ولكن في كثير من الأحيان لا يكفي لتطوير دليل أو برهان.

تدعم الدراسات فكرة أن استخدام الأمثلة يمكن أن يكون مثمرًا لطلاب المرحلة الثانوية في البرهان الرياضي. على سبيل المثال، أوضحت دراسة (Ozgur et al. , 2019) أن الطلاب (من بينهم طلاب المرحلة الثانوية) الذين استطاعوا البرهنة بنجاح قد مكنتهم الأمثلة من اكتساب نظرة ثاقبة حول التخمين من خلال مساعدتهم على رؤية عنصر هيكلي وفهم سبب كون التخمين صحيحًا، وتعميم فهمهم، ومراجعة التخمين المحدد، وإثبات التخمين. كما أوضحت نتائج دراسة (Ellis et al., 2019) أن استخدام الطلاب (من بينهم طلاب المرحلة الثانوية) للأمثلة ساعدهم على اكتساب نظرة ثاقبة على طبيعة التخمين أو كيفية تبريره، تطوير تخمينات جديدة أو مراجعة تلك الموجودة (دعم التخمين). كما أوضحت نتائج الدراسة أن الطلاب استخدموا الأمثلة لعدد من الأهداف منها جعل تخمينهم ذي معنى، أو لدحض التخمين أو لتطوير تخمين جديد، أو لإيصال الادعاء بأن التخمين صحيح (أو خاطئ)، أو لنقل حجة عامة. علاوة على ذلك، تشير نتائج دراسة (Aricha-Metzer & Zaslavsky, 2019) إلى قدرة الطلاب (من بينهم طلاب المرحلة الثانوية) على الاستخدام المثمر للأمثلة في البرهان من حيث تطوير دليل، أو حجة استنتاجية، أو مبرر سليم قد يؤدي إلى برهان، كما أظهرت النتائج وجود علاقة قوية بين الاستخدام المثمر للأمثلة ومعالجة الأمثلة بشكل عام. كما وجد (Buchbinder & Zaslavsky, 2019) أن طلاب المرحلة الثانوية أظهروا فهما قويا لدور الأمثلة في البرهان؛ فهم يدركون أن الأمثلة الداعمة غير كافية للأثبات وأن مثالاً مضادًا واحدًا يكفي لدحض عبارة عامة.

وبالرغم من أهمية الدور الذي قد تلعبه الأمثلة في البرهان، إلا أنه توجد عوامل قد تمنع الطلاب من استخدام الأمثلة بشكل منتج في بناء برهانهم. أحد هذه العوامل هو اعتقاد بعض الطلاب أن استخدام مجموعة من الأمثلة الصحيحة كاف لإثبات صحة العبارة الرياضية (المعزي، ٢٠١٩)، (Alcock & Weber, 2010). فغالبًا ما يستنتج الطلاب أن الادعاء العام ينطبق على جميع الحالات على أساس التحقق من بعض الأمثلة التي تفي بهذا الادعاء (Aricha-Metzer & Zaslavsky, 2019) .

وجد (Buchbinde & Zaslavsky, 2013) أيضا أن بعض الطلاب كانوا مقتنعين بأنه يمكن إثبات صحة عبارة من خلال فحص العديد من الأمثلة المؤكدة. كما وجد (Ozgur et al. , 2019) أن من العوامل التي تعوق قدرات الطلاب على استخدام الأمثلة بنجاح في البرهان: عدم وجود فضول لدى الطلاب حول كيفية استكشاف سبب كون التخمين صحيحًا، والذي كان يقترن غالبًا بفكرة سيئة للإثبات، والقفز إلى الإجراءات الشكلية كأول لجوء لإثبات التخمين. كذلك وجد (Alcock & Weber, 2010) أن من العوامل التي تعوق قدرات الطلاب على استخدام الأمثلة بنجاح في البرهان: عدم فهم المفهوم مما يمنع الطلاب من اختيار الأمثلة المناسبة للموقف، وعدم القدرة على ترجمة التفكير من الأمثلة إلى إثبات رسمي.

إن توليد الطلاب للأمثلة لا يتم مصادفة، ولكنه يعتمد على الاختيار والتصميم الواعي للمهام التي تثير الحاجة إلى استخدام الأمثلة. يؤكد (Zaslavsky & Knuth, 2019) أنه يجب أن تثير المهام الحاجة إلى استخدام الأمثلة لتحديد ما إذا كان الادعاء صحيحًا أم لا (أو متى يكون صحيحا) وإلى تطوير فكرة عن كيفية البرهان. إحدى الطرق الممكنة لإنشاء المواقف التعليمية التي تنشأ فيها الحاجة إلى استخدام الأمثلة هي استخدام المهام التي تثير الشك وعدم اليقين؛ عدم اليقين حول التخمين (أي ما إذا كان صحيحًا أو خاطئًا)، أو حول موقف لحل المشكلات لا يوجد فيه للشخص أي استراتيجية حل متوفرة (Zaslavsky et al., 2012). ويؤكد (Buchbinder & Zalsavshy, 2013)أنه عند تصميم المهام التي تهدف إلى الكشف عن العلاقة بين البرهان واستخدام الأمثلة يجب اختيار أو بناء المشكلات التي لا تكون مألوفة لدى الطلاب ولا يكون مدى صحتها واضحة على الفور لخلق درجة من عدم اليقين والشك، ولكن في نفس الوقت يجب التأكد من أن الطلاب لديهم المعرفة اللازمة للتعامل مع المهام. عدم اليقين الذي تحدثه المهام يؤدي إلى إثارة نقاش الطلاب ومحاولاتهم لإقناع بعضهم البعض من خلال الجدال، مما يسمح بالكشف عن جوانب مختلفة من فهمهم (Buchbinder & Zalsavshy, 2013).

نموذج تولمن للحجة:

يتيح نموذج تولمن تحليل الحجج الذي تستخدم فيها الأمثلة. يتكون نموذج تولمن للحجة (Toulmin, 2003) من ثلاثة عناصر رئيسة:

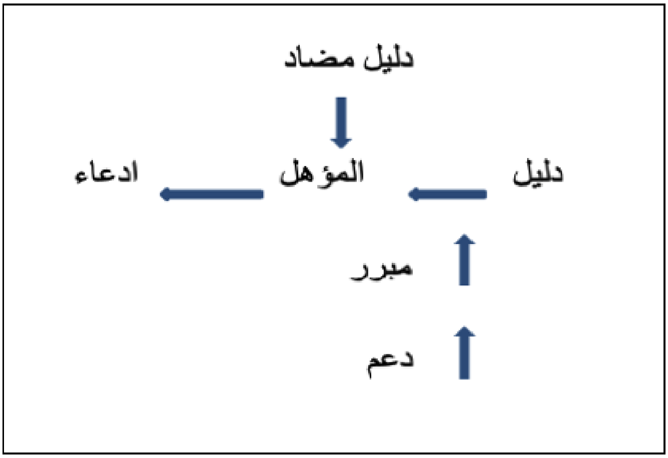
- الادعاء Claim: هو النتيجة أو التأكيد الذي يحاول الطالب إثباته، أو هو الزعم الموجود عند الطالب. في أي حجة، يتم التعبير عن الخطوة الأولى من خلال وجهة نظر (تأكيد أو رأي). في مصطلحات تولمن، تسمى وجهة النظر هذه بالادعاء.
- الدليل Data: وهو بيانات أو حقائق لدعم الادعاء.
- المبرر Warrant: وهو تبرير الصلة بين الادعاء والدليل. تعد المبررات (الأسباب) مثل "الجسور" التي تربط الادعاء بالدليل. المبرر هو الأساس المنطقي الذي يتم استخدامه لإنشاء استنتاجات. يمكن أن تأخذ المبررات شكل الصيغ والتعاريف، والأمثلة، والرسومات أو الرسوم البيانية.

وقدم تولمن ثلاثة عناصر مساعدة لوصف الحجة بشكل كامل:

- الدعم Backing: وهو الافتراض أو المبدأ أو الفكرة التي تدعم المبرر. وهو دليل إضافي مطلوب يستخدم لدعم وتعزيز المبرر أو الأسباب.
- المؤهل Qualifier : هي عبارة تعطى إلى الاستنتاج للإشارة إلى مستوى الثقة في الادعاء، مثل "ربما"، "أكيد".
- دليل مضاد Rebuttal: هو عبارة ترفض النتائج التي تم إنشاؤها إذا لم تتحقق الشروط.

وتجدر الإشارة إلى أنه في أي حجة، ليس بالضرورة أن تظهر جميع هذه الأدوار صراحةً. ويمكن توضيح نموذج تولمن في المخطط كما في شكل (١).

يمكن أن تلعب الأمثلة دورًا مهمًا في مكون "المؤهل" وفي مكون "الدليل المضاد" لنموذج تولمن حيث يمكن أن تؤثر الأمثلة على مستوى الثقة في الادعاء (المؤهل) إذا تم استخدامها لدعم الحدس أو التخمين الذي تم إنشاؤه مسبقًا، كما يمكن أن تؤدي الأمثلة المضادة إلى إضعاف الحجة ولعب دور الدليل المضاد إذا تم استخدامها لتحديد الحالات التي لا يتحقق فيها الادعاء، كذلك يمكن استخدام الأمثلة كدليل لدعم الادعاء (Pedemonte & Buchbinder, 2011).



شكل (١) نموذج تولمن

مثال يوضح نموذج تولمن:

قد يقول أحد الطلاب في محاولة لأثبات ادعاء ما: اعتقد أن مجموع أي أعداد صحيحة متتالية يكون قابلا للقسمة على عددهم (ادعاء)، لأن إذا جمعنا ١+٢+٣+٤+٥ فإن المجموع ١٥ يقبل القسمة على ٥ (دليل)، وكذلك إذا جمعنا ٢+٣+٤+٥+٦ = ٢٠ تقبل القسمة أيضا على ٥ (دليل)، يرجع السبب في ذلك أنه عند إضافة أرقام متتالية فإن كل رقم يزداد بمقدار واحد صحيح والمجموع يزداد بمقدار ٥ وبذلك فإن المجموع يقبل القسمة دائما على ٥ (مبرر). كذلك الأرقام ٥+٦+٧+٨+٩ = ٣٥ تقبل القسمة على ٥ (دعم). لكن مجموع الأرقام ٥+٦+٧+٨ (والتي يجب أن تقبل القسمة على ٤ (عددهم) بحسب هذا الادعاء) يساوي ٢٦ والذي لا يقبل القسمة على ٤ (دليل مضاد). إذن الادعاء بأن مجموع أي أعداد صحيحة متتالية يكون قابلا للقسمة على عددهم أكيد غير صحيح (مؤهل).

تحليل البيانات:

تمت عملية تحليل البيانات وفقا للخطوات التالية:

- بدأت عملية تحليل البيانات بنسخ جميع المقابلات حرفيًا (ملحق ٣)، مع الأخذ في الاعتبار كل ما قالته وكتبته الطالبات. في بعض الأحيان، كان الكلام مجرد تلاوة لما تم كتابته، وكان هذا عادة بعد اتفاق ما بين الطالبات حول ما ينبغي عمله وكيف. عادة ما يتم متابعة كتابة الحل مع وقفة بينما تحدق الطالبات فيما كتب أو مناقشة ما قد قصدوه. كان هذا الميل إلى كتابة ما تم الاتفاق عليه شفهياً مفيدًا للغاية بالنسبة للباحثة لأنه أظهر ما إذا كانت

الطالبات يفكرن فيما يتعلق بالهياكل الرياضية التي يتم تمثيلها وعلاقتها بالأفكار الرياضية المرتبطة بها.

- قراءة المقابلات المكتوبة عدة مرات بهدف فصل إجابات الطالبات الدالة على البرهان الناجح - وذلك لتحديد أدوار الأمثلة في البرهان - والاجابات الدالة على البرهان غير ناجح – وذلك لتحديد المعوقات التي منعت الطالبات من الاستخدام الناجح للأمثلة.
- قراءة المقابلات المكتوبة عدة مرات بهدف البحث عن عناصر نموذج تولمن. ثم تم استخدام الترميز Codes لعناصر نموذج تولمن.
- قراءة المقابلات المكتوبة لإجابات الطالبات الدالة على البرهان الناجح عدة مرات بهدف البحث عن كلمات وجمل تتكرر في أقوال الطالبات بشكل مستمر وتدل على حدوث أحد أدوار الأمثلة في البرهان الرياضي. ثم تم تطوير أكواد Codes لتحديد الأدوار التي لعبتها الأمثلة في حلول الطالبات (ملحق ٣).
- قراءة المقابلات المكتوبة لإجابات الطالبات الدالة على البرهان غير الناجح عدة مرات بهدف البحث عن المعوقات التي منعت الطالبات من الاستخدام الناجح للأمثلة. ثم تم تطوير أكواد Codes للمعوقات التي منعت الطالبات من الاستخدام الناجح للأمثلة (ملحق ٣).
- تجميع الادوار المتشابهة والمعوقات المتشابهة في فئات وإنتاج أسماء وتعريفات أولية لها. بعد تحديد هذه الفئات، قامت الباحثة بالتفتيش على كل مثيل استخدم فيه أحد المشاركين مثالًا. خلال هذه العملية، قامت الباحثة بمقارنة الترميزات الخاصة بهم. في بعض الأحيان، تم تنقيح تعريفات الفئات، وتم تشكيل فئات جديدة، أو انهارت فئات متعددة حالية في فئة واحدة. استمرت هذه العملية حتى اكتمل الترميز. كانت نتيجة هذه العملية عبارة عن مجموعة من خمس فئات رئيسة للأدوار التي لعبتها الأمثلة في حلول الطالبات، وهي: فهم تخمين أو عبارة رياضية، تقييم صحة العبارات الرياضية، التبرير بناء على ملاحظة الهياكل الرياضية، تعميم الفهم، دحض التخمين. كما أوضح التحليل مجموعة من أربع فئات رئيسه للمعوقات التي أعاقت بعض الطالبات من الاستفادة من الأمثلة في فهم وتطوير البرهان، وهي: استخدام أمثلة مؤكدة متنوعة، استخدام أمثلة تجريبية بطريقة عشوائية، عدم إدراك دور الأمثلة المضادة، القفز إلى الحلول الجبرية.

الصدق الداخلي: Internal validity

يعتمد الصدق في البحوث النوعية على تحديد ما إذا كانت النتائج التي توصل إليها الباحث تعتبر صحيحة من قبل المشاركين، والباحث، والقارئ. بمعنى آخر، يتعلق الصدق بمسألة كيفية تطابق نتائج الدراسة مع الواقع (Creswell, 2014).

في البحث الحالي، تم القيام بما يلي لضمان صدق النتائج (Creswell, 2014) :

- تم جمع البيانات بطرق متعددة (المقابلات، وأوراق عمل الطالبات، والملاحظات الميدانية).
- تم عرض ومناقشة تفسيرات واستنتاجات الباحثة مع الطالبات موضع البحث من خلال استخدام مجموعة نقاش مركزة Focus Group من الطالبات الاثنتي عشرة وذلك لإتاحة الفرصة للطالبات لتوضيح قصدهم من استخدام الأمثلة والتحقق من صحة تفكير الباحثة وتقديم معلومات إضافية إذا لزم الأمر.

الصدق الخارجي: External validity

يتعلق الصدق الخارجي بتعميم نتائج البحث (Merriam, 1998). ولضمان الصدق الخارجي، قامت الباحثة بتقديم وصف تفصيلي لإجراءات البحث والنتائج ليتمكن القارئ من تقييم قابلية تطبيق النتائج ويحدد ما إذا كانت تتناسب مع وضعه وحالته.

الثبات: Reliability

يشير الثبات في البحوث النوعية إلى "مدى إمكانية تكرار النتائج (Yin, 2009). بمعنى آخر، إذا اتبع باحث لاحق نفس الإجراءات كما وصفها باحث سابق وأجرى نفس دراسة الحالة مرة أخرى، فيجب أن يتوصل الباحث اللاحق إلى نفس النتائج والاستنتاجات (Yin, 2009) . مع الأخذ في الاعتبار أن الباحثين النوعيين، بشكل عام، لا ينظرون إلى السلوك البشري باعتباره ثابتًا، ولا يعملون على فكرة أنه لا يوجد سوى حقيقة واحدة يمكن تكرارها، إلا أنه من المستحسن أن يتخذ الباحثون النوعيون خطوات نحو زيادة ثبات عملهم(Merriam, 1998). لتحقيق ذلك، يوصي (Yin, 2009) الباحثون بتوثيق أكبر عدد ممكن من الخطوات الإجرائية التي اتبعوها في دراستهم للحالة وذلك من خلال استخدام بروتوكول لدراسة الحالة والاحتفاظ بقاعدة بيانات لدراسة الحالة.

في البحث الحالي، تم القيام بما يلي لضمان ثبات النتائج (Yin, 2009) :

- تم الاحتفاظ بقاعدة بيانات لدراسة الحالة شملت المقابلات المكتوبة (ملحق ٣). تعمل قاعدة بيانات دراسة الحالة كمصدر إثبات للأشخاص الذين يرغبون تكرار هذا البحث.
- تم إنشاء بروتوكول لدراسة الحالة هدف إلى تحديد الإجراءات التفصيلية لإجراء البحث (ملحق ٤). تضمن البروتوكول: هدف البحث، أسئلة البحث،

خطوات البحث وإجراءاته، كيفية اختيار عينة البحث، أدوات وخطوات جمع البيانات.

نتائج البحث:

كشفت نتائج البحث عن خمسة أدوار أساسية للأمثلة في مساعدة طالبات المرحلة الثانوية في فهم وتطوير البرهان الرياضي. هذه الأدوار هي: فهم تخمين أو عبارة رياضية، تقييم صحة العبارات الرياضية، التبرير بناء على ملاحظة الهياكل الرياضية، تعميم الفهم، دحض التخمين. كذلك كشفت النتائج عن بعض المعوقات التي أعاقت بعض طالبات المرحلة الثانوية من الاستفادة من الأمثلة في فهم وتطوير البرهان الرياضي. هذه المعوقات هي: استخدام أمثلة مؤكدة متنوعة، استخدام الأمثلة بطريقة عشوائية، عدم إدراك دور الأمثلة المضادة، القفز إلى الحلول الجبرية.

أولا: الأدوار التي ساهمت بها الأمثلة في مساعدة طالبات المرحلة الثانوية في فهم وتطوير البرهان الرياضي:

أوضحت النتائج خمسة أدوار رئيسة لعبتها الأمثلة في مساعدة الطالبات على فهم وتطوير البرهان الرياضي. هذه الأدوار هي: فهم تخمين أو عبارة رياضية، تقييم صحة العبارات الرياضية، التبرير بناء على ملاحظة الهياكل الرياضية، تعميم الفهم، دحض التخمين. سوف يتم فيما يلي تناول كل دور من هذه الأدوار بشيء من التفصيل:

فهم تخمين أو عبارة رياضية:

لعبت الأمثلة دورا في مساعدة الطالبات على فهم التخمينات أو العبارات الرياضية. على سبيل المثال، عند إعطاء مجموعة دينا و شهد المهمة (١)، استخدمت شهد الأمثلة لمساعدة دينا على فهم المهمة، كما يتضح من الحوار التالي:

مهمة (١): **توصل تامر إلى تخمين حول الأعداد الصحيحة المتتالية التي تنص على:** **إذا قمت بجمع أي أعداد من الأعداد الصحيحة المتتالية معًا، فسيكون المجموع قابلا للقسمة على عدد الأعداد التي قمت بإضافتها.** **(أ) هل تعتقد أن هذا التخمين سيكون صحيحا لأي ٥ أعداد متتالية؟ ولماذا؟** **(ب) هل تعتقد أن هذا التخمين سيكون دائما صحيحا بغض النظر عن عدد الأعداد المتتالية وبغض النظر عن أي أعداد متتالية تختارها؟**

دينا: مش فاهمة أية المطلوب؟

شهد: المهمة بتقول إننا لو جمعنا أعداد متتالية ذي مثلا ١، ٢، ٣، ٤، ٥ فإن حاصل الجمع يقبل القسمة على عددهم، يعني لو جمعت ١+ ٢+ ٣+ ٤+ ٥ مفروض الناتج يقبل القسمة على ٥.

كذلك عند اعطاء مجموعة بسمة وابتسام المهمة (٤)، استخدمت بسمة الأمثلة لمساعدة ابتسام على فهم المهمة، كما يتضح من الحوار التالي:

مهمة (٤): **هل تستطيع أن تتوصل إلى تخمين عن الأعداد التي تحتوي على عدد فردي من العوامل؟**

ابتسام: مش فاهمة.

بسمة: الأعداد التي تحتوي على عدد فردي من العوامل... عوامل العدد يعني... كم في كم يعطي هذا العدد. يعني مثلا عوامل العدد ٣٠:

٣٠، ١

٢، ١٥

١٠، ٣

٥، ٦

عدد هذه العوامل ٦

والمطلوب إيجاد أعداد عدد عواملها فردي.

بدأت الطالبات خطوات البرهان بقراءة واعية للمشكلة بهدف فهم معني العبارة الرياضية واكتشاف المشكلة الحقيقية. واضح من الحوار السابق أن الطالبات استخدمن أمثلة لفهم معلومات (بيانات) المشكلة. البيانات في المهمة (١) هي حاصل جمع الأعداد الصحيحة المتتالية، والادعاء المطلوب أثباته هو أن حاصل جمع الأعداد الصحيحة المتتالية يكون دائما قابل للقسمة على عددهم. البيانات في المهمة (٤) هي معنى عوامل العدد، والادعاء المطلوب إثباته هو التوصل إلى تخمين عن الأعداد التي تحتوي على عدد فردي من العوامل. لعبت الأمثلة دورا في فهم البيانات بحسب نموذج تولمن مع عدم توليد أي أدعاء أو قرار ما إذا كانت العبارة صحيحة أو خطأ.

تقييم صحة العبارات الرياضية:

لعبت الأمثلة دورا في مساعدة الطالبات على تقييم صحة العبارات الرياضية. على سبيل المثال، في مهمة جمع الأعداد الصحيحة المتتالية (مهمة ١)، جربت دينا وشهد مجموعات من الأمثلة للتأكد من صحة التخمين المعطى، كما يتضح من الحوار التالي:

دينا: خلينا نتأكد من صحة هذا الكلام لخمسة أعداد متتالية:

١+٢+٣+٤+٥ = ١٥ √ تقبل القسمة على ٥ (دليل)

٢+٣+٤+٥ +٦= ٢٠ √ تقبل القسمة على ٥ ((دليل)

٣+٤+٥+٦+٧ = ٢٥ √ تقبل القسمة على ٥ (دليل)

واضح أن التخمين صحيح لأي ٥ أعداد صحيحة متتالية. (ادعاء١)

شهد: واضح أننا لما ضفنا أرقام وراء بعضها (متتالية)، كل رقم يزيد بمقدار ١، والمجموع يزداد بمقدار ٥ لان هناك ٥ ارقام، بإضافة ٥ الي كل مجموع فان

المجموع لا يزال مضاعفات الـ٥، وبكدا أي سلسلة مكونة من ٥ ارقام متتالية لازم تكون قابلة للقسمة علي ٥ (مبرر)

دينا: ممكن نجرب ٣ أعداد

١٠+١١+١٢= ٣٣ تقبل القسمة على ٣ (دليل)

١١+١٢+١٣= ٣٦ تقبل القسمة على ٣ (دليل)

التخمين صحيح لـ ٣ أعداد (ادعاء٢)

نفس السبب لما ضفنا أرقام وراء بعضها، كل رقم ذاد بمقدار ١، والمجموع ذاد بمقدار ٣ ، بإضافة ٣ الي كل مجموع فان المجموع لا يزال مضاعفات الـ٣، فالمجموع لازم يقبل القسمة على ٣ (مبرر)

شهد: إذن التخمين صحيح (لجميع الأعداد الصحيحة المتتالية) (ادعاء)

دينا: خلينا نجرب ٦ أعداد

١+٢+٣+٤+٥+٦ = ٢١ لا تقبل القسمة على ٦ (مثال مضاد)

التخمين غير صحيح لـ ٦ أعداد. (ادعاء٣)

شهد: ممكن نجرب ٤ أعداد

١+٢+٣+٤= ١٠ لا تقبل القسمة على ٤ (مثال مضاد)

التخمين غير صحيح لـ ٤ أعداد. (ادعاء٤)

ممكن أن التخمين صحيح للأعداد التي عددها فردي... وخطأ للأعداد التي عددها زوجي (ادعاء)

دينا: خلينا نجرب عدد فردي تاني ذي ٧ أعداد، وعدد زوجي تاني

١+٢+٣+٤+٥+٦+٧= ٢٨ التخمين صحيح لـ ٧ أعداد. (دعم)

شهد: ١١+١٢= ٢٣ .. لا تقبل القسمة على ٢ (دعم)

الخمين صحيح لـ ٥ أعداد، ٣ أعداد، ٧ أعداد، ٩ أعداد، وغير صحيح لـ ٤، ٦، ٢

التخمين أكيد صحيح للأعداد التي عددها فردي وغير صحيح للأعداد التي عددها زوجي. (ادعاء مع ثقة)

في المهمة السابقة، الادعاء المطلوب أثباته هو أن حاصل جمع الأعداد الصحيحة المتتالية يكون دائما قابلا للقسمة على عددهم. واضح من الحوار السابق أن الطالبتين استخدمتا أمثلة لتقييم صحة الادعاء. استخدمت الطالبتان الأمثلة كدليل لدعم الادعاء بأن التخمين صحيح لأي أعداد صحيحة متتالية. ثم استخدمت الطالبتان المثال المضاد كدليل مضاد لهذا الادعاء حيث وجدتا أن التخمين غير صحيح مع الأعداد الصحيحة المتتالية التي عددها زوجي. ومن ثم توصلتا إلى الادعاء بأن التخمين صحيح للأعداد التي عددها فردي وخطأ للأعداد التي عددها زوجي ولكن بدرجة ثقة ضعيفة، حيث ذكرتا " ممكن أن التخمين صحيح لـ..". استخدمت الطالبتان الأمثلة كدليل إضافي (دعم) لإثبات صحة التخمين مع الأعداد التي عددها فردي وخطأ التخمين مع الأعداد

التي عددها زوجي حين قدموا دليلا إضافيا باستخدام ٧ أعداد (فردي) وباستخدام رقمين (زوجي). وبذلك توصلتا إلى الادعاء النهائي مع درجة ثقة عالية، حيث ذكرتا: " التخمين أكيد صحيح للأعداد التي عددها فردي وغير صحيح للأعداد التي عددها زوجي".

كذلك عند أعطاء الطالبات المهمة (٢)، قامت مجموعة منه وأروي باستخدام الأمثلة لتقييم صحة التخمين، كما يتضح من الحوار التالي:

مهمة (٢):

قام أحد التلاميذ بأخذ كسرين $\frac{١}{٢}$، $\frac{٣}{٤}$، وقام بجمع البسوط والمقامات بالطريقة التالية:

$$\frac{١+٣}{٢+٤} = \frac{٤}{٦} = \frac{٢}{٣}$$

لاحظ التلميذ أن الكسر الناتج $\frac{٢}{٣}$ يقع بين الكسرين $\frac{١}{٢}$، $\frac{٣}{٤}$ $(\frac{١}{٢} < \frac{٢}{٣} < \frac{٣}{٤})$

هل هذا صدفة؟ ولماذا؟

أروى: واضح أن الكسرين ($\frac{١}{٢}$، $\frac{٣}{٤}$) أقل من الواحد (ملاحظة الهياكل الرياضية)

منة: خلينا نتأكد من صحة هذا التخمين لكسور أخرى أقل من الواحد ذي $\frac{١}{٤}$، $\frac{١}{٦}$

$$\frac{١+١}{٤+٦} = \frac{٢}{١٠} = \frac{١}{٥}$$

$\frac{١}{٥}$ تقع بين $\frac{١}{٤}$، $\frac{١}{٦}$ (دليل)

أروى: خلينا نشوف الكسرين $\frac{١}{٥}$، $\frac{٢}{٧}$

$$\frac{١+٢}{٥+٧} = \frac{٣}{٩} = \frac{١}{٣}$$

$\frac{١}{٣}$ تقع بين $\frac{١}{٥}$، $\frac{٢}{٧}$ (دعم١)

واضح أن التخمين صحيح إذا كان الكسران أقل من الواحد الصحيح (ادعاء ١)

اروي: ممكن نجرب كسرين واحد منهم أكبر من الواحد والثاني أقل من الواحد ذي $\frac{٧}{٤}$، $\frac{٢}{٥}$

$$\frac{٧+٢}{٤+٥} = \frac{٩}{٩} = ١$$ وهو يقع بين الكسرين بالفعل (دليل)

أو ممكن الكسرين: $\frac{٥}{٣}$، $\frac{٢}{٣}$

$\frac{٥+٢}{٣+٣} = \frac{٧}{٦}$ وهو يقع بين الكسرين بالفعل (دعم٢)
واضح أن التخمين صحيح (في حالة أن كسر أكبر من الواحد والكسر الثاني أقل من الواحد) (ادعاء ٢)
منه: ممكن نجرب كسرين أكبر من الواحد ذي $\frac{٥}{٢}$، $\frac{٢٣}{٢٠}$
$\frac{٥+٢٢}{٢+٢٠} = \frac{٢٩}{٢٢}$ وهي تقع بالفعل بين الكسرين (دليل)
أو ممكن الكسرين: $\frac{٧}{٢}$، $\frac{٨}{٣}$
$\frac{٧+٨}{٢+٣} = \frac{١٥}{٥}$ وهو يقع بين الكسرين بالفعل (دعم٣)
التخمين صحيح (في حالة كسرين أكبر من الواحد) (ادعاء ٣)
التخمين صحيح لكل الكسور. (ادعاء)
واضح من الحوار السابق أن الطالبتين استخدمتا أمثلة لتقييم صحة الادعاء. الادعاء المطلوب إثباته أنه عند جمع بسوط ومقامات كسرين فإن الكسر الناتج يقع بين هذين الكسرين. استخدمت الطالبتان الأمثلة كدليل لأقناع أنفسهما بصحة الادعاء (الادعاء١، ٢، ٣). كذلك استخدمت الطالبتان الأمثلة كدليل إضافي (دعم ١، ٢، ٣). بناء على الادعاء ١، ٢، ٣ توصلت الطالبتان للادعاء النهائي بأن التخمين صحيح لكل الكسور.

التبرير بناء على ملاحظة الهياكل الرياضية:

ساعدت الأمثلة الطالبات على ملاحظة الهياكل الرياضية مما مكنتهن من تبرير صحة العلاقات الرياضية. على سبيل المثال، في مهمة جمع الأعداد الصحيحة المتتالية (مهمة ١)، من خلال مقارنة الأمثلة وملاحظة الاختلافات والتشابهات الهيكلية عبر الأمثلة تمكنت مريم وجاكلين من ملاحظة وجود هيكل رياضي بين الأمثلة مما أدى بهما إلى تبرير لماذا هذا التخمين صحيح لأي خمسة أعداد صحيحة متتالية، كما يتضح من الحوار التالي:

الباحثة: توصلتوا أن التخمين صحيح لأي ٥ اعداد صحية متتالية، لماذا تعتقدي التخمين صحيح لأي ٥ اعداد متتالية؟
مريم: ١+٢+٣+٤+٥ = ١٥ = ٥ × ٣ (دليل)
واضح أن المجموع يساوي العدد الأوسط مضروب في ٥ (ادعاء ١)
مريم: ٣+٤+٥+٦+٧ = ٢٥ = ٥ × ٥ (دليل)
واضح أن المجموع يساوي العدد الأوسط مضروب في ٥ (ادعاء ١)

جاكلين: ١٠+ ١١+ ١٢ +١٣+١٤ =٦٠ = ٥ × ١٢ (دعم)
جاكلين: واضح أن حاصل الجمع عبارة عن ٥ مضروبة في العدد الأوسط. علشان كدة الناتج دائما يقبل القسمة على ٥... لأن مهما جبنا أرقام وراء بعض هيكون المجموع دائما عبارة عن رقم (العدد الأوسط) مضروب في ٥ (مبرر) علشان كده لما اقسم على ٥ لابد أنه هيقبل القسمة على ٥ ، يبقى التخمين لازم يكون صحيحا دائما لأي ٥ أعداد صحيحة متتالية (ادعاء نهائي مع ثقة).

استخدمت مريم وجاكلين أمثلة رقمية (دليل) لأعداد صحيحة متتالية وقامتا بجمعها ومن ثم توصلتا إلى ادعاء أن المجموع يساوي العدد الأوسط مضروبا في ٥، ثم كررتا نفس العملية مع أمثلة أخرى لأعداد أخرى صحيحة متتالية كدليل إضافي (دعم) وتوصلتا إلى نفس الادعاء. الأمثلة هنا تمثل عنصر الدليل والأمثلة الإضافية تمثل عنصر الدعم في نموذج تولمن. من خلال مقارنة الدليل والدعم والادعاء التي توصلتا إليه وملاحظة الاختلافات والتشابهات الهيكلية عبر الأمثلة تمكنت مريم وجاكلين من ملاحظة وجود هيكل رياضي بين الأمثلة وهو أن المجموع يساوي العدد الأوسط مضروب في ٥ مما مكنتهما من تبرير الصلة بين الادعاء والدليل (مبرر). في النهاية توصلتا إلى ادعاء نهائي وهو أن مجموع خمسة أعداد يساوي العدد الأوسط مضروبا في ٥ (عددهم)، مع درجة من الثقة بصحة الادعاء، حيث ذكرتا: "التخمين لازم يكون صحيح دائما".

كذلك عند إعطاء المهمة (٦)، لاحظت بسمة وابتسام هيكل رياضي بين الأمثلة وهو أنه عند ضرب ٤ أعداد صحيحة متتالية فإن سلسلة الأعداد سوف تحتوي دائما على أرقام تقبل القسمة على ٢، ٣، ٤ والتي هي ٢٤. ملاحظة هذا الهيكل الرياضي بين الأمثلة ساعدهما على تبرير لماذا العبارة الرياضية صحيحة، كما يتضح من الحوار التالي:

مهمة (٦): **توصلت نسمة إلى التخمين الذي ينص على:** **إذا قمت بضرب أي ٤ أعداد متتالية معا، فستكون الإجابة من مضاعفات الـ ٢٤.** **هل تعتقد أن تخمين نسمة صحيح؟ ولماذا؟**

بسمة: خلينا نجرب ٤ أرقام
١×٢× ٣× ٤=٢٤ √ (دليل)
تحتوي هذه السلسلة على ٢، ٣، ٤ والتي هي ٢٤ (ملاحظة الهياكل الرياضية)
٢×٣× ٤× ٥=١٢٠ √ (دليل)
تحتوي هذه السلسلة أيضا على ٢، ٣، ٤ والتي هي ٢٤ (ملاحظة الهياكل الرياضية)
ابتسام: ٣×٤× ٥× ٦=٣٦٠ √ (دعم)

تحتوي هذه السلسلة على ٤، ٦ والتي هي أيضا ٤، ٢، ٣ والتي هي ٢٤ (ملاحظة الهياكل الرياضية)

ابتسام: خلينا نجرب ٤ أرقام متتالية أكبر

٢٠×٢١×٢٢×٢٣ (دعم)

تحتوي على أرقام تقبل القسمة على ٢، ٣، ٤ (ملاحظة الهياكل الرياضية)

ابتسام: واضح أن حاصل الضرب عبارة عن أعداد تحتوي على أرقام تقبل القسمة على ٢، ٣، ٤. علشان كده الناتج دائما يقبل القسمة على ٢٤... لأن مهما جبنا ٤ أرقام وراء بعض هيكون حاصل الضرب دائما عبارة عن أرقام تحتوي على الـ ٢٤، علشان كدة لما اقسم على ٢٤ لابد أنه هيقبل القسمة على ٢٤ (مبرر). يبقى التخمين لازم يكون صحيح لأي ٤ أعداد صحيحة متتالية (ادعاء نهائي مع ثقة).

استخدمت بسمة وابتسام أمثلة رقمية لأعداد صحيحة متتالية وقامتا بضربها ومن ثم لاحظتا أن حاصل الضرب يحتوي على الأعداد ٢، ٣، ٤ والتي هي ٢٤، ثم كررتا نفس العملية مع أمثلة لأعداد أخرى صحيحة متتالية كدليل إضافي (دعم) وتوصلتا إلى نفس الملاحظة. الأمثلة هنا تمثل عنصر الدليل والأمثلة الإضافية تمثل عنصر الدعم في نموذج تولمن. من خلال مقارنة الدليل والدعم وملاحظة الاختلافات والتشابهات الهيكلية عبر الأمثلة تمكنت بسمة وابتسام من ملاحظة وجود هيكل رياضي بين الأمثلة مما مكنتهما في النهاية من التوصل إلى ادعاء نهائي وهو أنه عند ضرب ٤ أعداد صحيحة متتالية فإن سلسلة الأعداد سوف تحتوي دائما على أرقام تقبل القسمة على ٢، ٣، ٤ والتي هي ٢٤، مع درجة من الثقة بصحة الادعاء، حيث ذكرتا: "التخمين لازم يكون صحيح".

تعميم الفهم:

لعبت الأمثلة دورا في مساعدة الطالبات على تعميم فهمهن ومن ثم توليد تخمينات. على سبيل المثال، في مهمة (٤) لاحظت دينا وشهد هيكلا رياضيا بين الأمثلة ومن ثم قامتا بتعميم هذا الهيكل (تعميم هيكلي) وتوصلتا إلى أن العدد التربيعي يحتوي على عدد فردي من العوامل:

الباحثة: العدد ١٨ ما هي عوامله؟

دينا: ١، ١٨

٢، ٩

٣، ٦

الباحثة: ما عدد العوامل؟

شهد:٦

الباحثة: عايزين أعداد عدد عواملها فردي

دينا: مش هينفع، العوامل دائما رقم في رقم، يبقي عددها دائما زوجي (ادعاء١). ذي مثلا عوامل العدد ٦ عبارة عن (٢، ٣)، (٦، ١) (دليل)... يعني ازواج

شهد: لا مش كل الأعداد عدد عواملها زوجي (ادعاء٢)... ممكن لما تكون العوامل رقمين ذي بعض (نفس الرقم مضروب في نفسه) فلما نيجي نعد نأخذ رقم واحد منهم بس .. لأنهم ذي بعض، يبقي عددهم فردي (مبرر) . ذي مثلا ٩ عواملها ٣،٣، ٩،١، يبقى العوامل: ٣، ٩، ١، عدد العوامل ٣ (دليل مضاد)

دينا: امممم....عندك حق... ممكن أيضا ١٦، عواملها: ٤، ٤، ٥، ٨، ١، ١٦، عدد العوامل ٥ (دعم)

شهد: ٢٥ عواملها: ٥، ٢٥، ١، عدد العوامل ٣ (دعم)

شهد: العدد التربيعي يكون عدد عوامله فردي (ادعاء)

بناء على البيانات التي قدمتها الباحثة (معنى عوامل العدد)، توصلت دينا إلى أن عدد عوامل أي عدد هو عدد زوجي (ادعاء١)، واستخدمت الأمثلة كدليل لهذا الادعاء. ولكن شهد رفضت هذا الادعاء واستخدمت الأمثلة كدليل مضاد لرفض هذا الادعاء. استخدمت الطالبتان أمثلة إضافية كمزيد من الأدلة لدعم الادعاء أنه ليس كل الأعداد عدد عواملها زوجي (ادعاء ٢). من خلال مقارنة وملاحظة الاختلافات والتشابهات الهيكلية عبر الأمثلة تمكنت الطالبتان من ملاحظة وجود هيكل رياضي بين الأمثلة وهو أن الأعداد التي عدد عواملها فردي هي أعداد تربيعية. ومن ثم قامت الطالبتان بتعميم فهمهما وتوصلتا إلى التخمين أن العدد التربيعي يحتوي على عدد فردي من العوامل مع درجة من الثقة.

كذلك عند إعطاء مجموعة سمر وسالي المهمة (٢)، لاحظت الطالبتان هيكلا رياضيا بين الأمثلة المعطاة في المهمة وهو أن الفرق بين بسط ومقام الكسر يساوي واحد صحيح، فقامتا بالتحقق من صحة التخمين للكسور التي يكون فيها الفرق بين بسطها ومقامها يساوي واحد صحيح والكسور التي الفرق بين بسطها ومقامها ليس واحداً صحيحاً. وبذلك تمكنتا من تعميم فهمهما وتوليد تخمين، كما يتضح من الحوار التالي:

سمر: واضح أن الفرق بين البسط والمقام في كل كسر يساوي ١(ملاحظة الهياكل الرياضية)

٢-١=١، ٤-٣=١

خلينا نتأكد من صحة هذا التخمين للكسور التي الفرق بين بسطها ومقامها يساوي ١

$\frac{٥}{٦}$، $\frac{٦}{٧}$ ------ $\frac{١١}{١٣}$ تقع بينهما (دليل)

سالي: $\frac{٢}{٣}$، $\frac{٤}{٥}$ ------- $\frac{٦}{٨}$ تقع بينهما أيضا (دعم)

$\frac{٤}{٥}$، $\frac{٦}{٧}$ ------- $\frac{١٠}{١٢}$ تقع بينهما (دعم)

إذن التخمين صحيح للكسور التي الفرق بين بسطها ومقامها يساوي ١ (ادعاء ١)

سمر: هنجرب كسور الفرق بين بسطها ومقامها ليس واحد

$\frac{٦}{٨}$، $\frac{٧}{٩}$ ------ $\frac{١٣}{١٧}$ تقع بينهما (دليل)

سالي: $\frac{٨}{١١}$، $\frac{٩}{١٣}$ ------ $\frac{١٧}{٢٤}$ تقع بينهما (دعم)

إذن التخمين صحيح للكسور التي الفرق بين بسطها ومقامها لا يساوي ١ (ادعاء ٢)

سالي: واضح أنه لأي كسرين إذا قمنا بجمع البسوط والمقامات يكون الكسر الناتج منحصرا بينهما. (ادعاء نهائي)

استخدمت سالي وسمر أمثلة رقمية لكسرين الفرق بين بسط ومقام كل كسر يساوي واحد صحيح وقامتا بجمع بسوط ومقامات الكسرين، فوجدتا أن الكسر الناتج يقع بين الكسرين (دليل). ومن ثم توصلتا إلى ادعاء أن التخمين صحيح للكسور التي الفرق بين بسطها ومقامها يساوي ١ (ادعاء ١). ثم كررتا نفس العملية مع أمثلة أخرى لكسور أخرى الفرق بين بسطها ومقامها يساوي واحد صحيح كدليل إضافي (دعم)، وتوصلتا إلى نفس الادعاء. ثم استخدمت سالي وسمر أمثلة رقمية لكسرين الفرق بين بسطها ومقامها لا يساوي واحد صحيح وقامتا بجمع بسوط ومقامات الكسرين، فوجدتا أن الكسر الناتج يقع بين الكسرين (دليل). ومن ثم توصلتا إلى ادعاء أن التخمين صحيح للكسور التي الفرق بين بسطها ومقامها لا يساوي ١ (ادعاء ٢). ثم كررتا نفس العملية مع أمثلة أخرى لكسور أخرى الفرق بين بسطها ومقامها لا يساوي واحد صحيح كدليل إضافي (دعم) وتوصلتا إلى نفس الادعاء. من خلال مقارنة الدليل والدعم التي توصلتا إليه وملاحظة الاختلافات والتشابهات الهيكلية عبر الأمثلة تمكنت سالي وسمر من تعميم فهمهما وتوليد التخمين أنه لأي كسرين إذا قمنا بجمع البسوط والمقامات يكون الكسر الناتج منحصرا بينهما.

دحض التخمين:

لعبت الأمثلة دورا في دحض التخمينات حيث استخدمت الطالبات أمثلة مضادة لإثبات أن عبارة رياضية غير صحيحة. على سبيل المثال، عند العمل مع المهمة (٣)، استخدمت مجموعة بسمة وابتسام الأمثلة لدحض التخمين، كما يتضح من الحوار التالي:

مهمة (٣)

المعلم: أعطيني كسر يقع بين $\frac{١}{٢}$ ، $\frac{٣}{٤}$

الطالب: $\frac{٢}{٣}$

المعلم: كيف عرفت؟

الطالب: لأن ٢ تقع بين ١، ٣، وكذلك ٣ تقع بين ٢، ٤

هل تعتقد أن هذا التخمين صحيحا دائما؟ ولماذا؟"

ابتسام: واضح أن الكسر اللي هو اختاره الفرق بين البسط والمقام يساوي ١

بسمة: خلينا نجرب أمثلة أخرى لكسور الفرق بين بسطها ومقامها يساوي ١

$\frac{٢}{٣}$ ، $\frac{٤}{٥}$ ---- $\frac{٣}{٤}$ تقع بينهما (دليل)

$\frac{١}{٢}$ ، $\frac{٤}{٥}$ ---- $\frac{٢}{٣}$ تقع بينهما (دليل)

$\frac{١}{٢}$ ، $\frac{٤}{٥}$ ---- $\frac{٣}{٤}$ تقع بينهما (دعم)

ابتسام: واضح أن التخمين صحيح في حالة الكسور التي الفرق بين بسطها ومقامها يساوي ١ (ادعاء ١)

خلينا نختار كسور الفرق بين البسط والمقام ليس واحد، ذي $\frac{١}{٢}$ ، $\frac{٥}{٧}$

بسمة: الكسور اللي مفروض تكون بينهما: $\frac{٢}{٣}$، $\frac{٢}{٤}$، $\frac{٢}{٥}$، $\frac{٢}{٦}$، $\frac{٣}{٣}$، $\frac{٣}{٤}$، $\frac{٣}{٥}$، $\frac{٣}{٦}$، $\frac{٤}{٣}$، $\frac{٤}{٤}$، $\frac{٤}{٥}$، $\frac{٤}{٦}$

واضح أن $\frac{٢}{٣}$، $\frac{٢}{٤}$ تقع بينهما (دليل)

إذن التخمين صحيح في حالة الكسور التي الفرق بين بسطها ومقامها ليس واحد (ادعاء ٢)

ابتسام: ثواني...مش كل هذه الكسور تقع بينهما ذي $\frac{٣}{٣}$، $\frac{٤}{٤}$ لأنها بتساوي ١ (دليل مضاد). إذن التخمين لا يعمل مع كل الحالات إذن فهو تخمين خاطئ.

في المهمة السابقة، الادعاء هو $\frac{٢}{٣}$ يقع بين $\frac{١}{٢}$ ، $\frac{٣}{٤}$ لأن ٢ تقع بين ١، ٣، و٣ تقع بين ٢، ٤. لاحظت بسمة وابتسام أن الكسرين المعطيين في المهمة الفرق بين بسطهما ومقامهما يساوي واحداً صحيحاً، فقامتا بتجريب أمثلة لكسور الفرق بين بسطها ومقامها يساوي ١، فوجدتا أن الكسر الناتج يقع بين الكسرين (دليل). ثم كررتا نفس العملية مع أمثلة أخرى لكسور أخرى الفرق بين بسطها ومقامها يساوي واحد صحيح كدليل إضافي (دعم) ومن ثم توصلتا إلى ادعاء أن التخمين صحيح للكسور التي

الفرق بين بسطها ومقامها يساوي ١ (ادعاء ١). ثم قامت بسمة وابتسام بتجريب أمثلة أخرى لكسور الفرق بين بسطها ومقامها لا يساوي ١، فوجدتا أن بعض الكسور الناتجة يقع بين الكسرين (دليل). بينما بعض الكسور لا تقع بين الكسرين (دليل مضاد). وبذلك رفضت الطالبتان صحة التخمين.

كذلك عند العمل مع المهمة (٥)، استخدمت مجموعة دينا وشهد الأمثلة لدحض التخمين، كما يتضح من الحوار التالي:

مهمة (٥): **يوجد ٣ أعداد صحيحة موجبة س، ص، ع تحقق المعادلة:** $\frac{س+ع}{ص+ع} = \frac{س}{ص}$ **هل تعتقد أن هذا التخمين صحيح ولماذا؟"**

دينا: واضح أن التخمين صحيح في حالة واحدة بس لو ع = صفر، والصفر مش من الأعداد الصحيحة الموجبة، مهما جبنا أرقام مش هيحقق المعادلة لأن الحالة الوحيدة أن المعادلة تتحقق أن ع = صفر (ادعاء)، والصفر مش عدد حقيقي موجب يبقي المعادلة خاطئة (دليل مضاد).

شهد: ممكن نخلي س=١، ص=٢ ونشوف ع تساوي كم: (دليل)

$$\frac{١+ع}{٢+ع} = \frac{١}{٢}$$

$$٢+٢ع = ٢+ع$$

$$ع=٠$$

شهد: الأعداد ٠، ١، ٢ لا تحقق التخمين لأن الصفر ليس من الأعداد الصحيحة الموجبة (دحض)

دينا: خلينا نأخذ س=١، ص=٣ ونشوف ع تساوي كم: (دعم)

$$\frac{١+ع}{٣+ع} = \frac{١}{٣}$$

$$٣+٣ع = ٣+ع$$

$$ع=٠$$

أيضا الأعداد ١، ٣، ٠ لا تحقق التخمين (دحض)

دينا: ذي ما أنا قلت مهما جبنا أرقام مش هتحقق المعادلة لأن الحالة الوحيدة أن المعادلة تتحقق أن ع = صفر، والصفر مش عدد حقيقي موجب يبقي المعادلة خاطئة.

شهد: خلينا نأخذ أرقام تاني لـ ع مثلا ع=٣، ونأخذ مثلا س=١، ونشوف ص تساوي كم:

$$\frac{١+٣}{ص+٣} = \frac{١}{ص}$$

ص+٣ = ص+٣ص

٣ص=٣

ص=١

يعني س = ص =١، ع =٣، ولكنة قال أعداد مختلفة! يبقى التخمين غير صحيح

دينا: خلينا نجرب أرقام تاني: س = ٣، ع = ٥

$$\frac{٣+٥}{ص+٥} = \frac{٣}{ص}$$

٨ص= ٣ص+١٥

٥ص=١٥

ص=٣

س =ص = ٣، ع = ٥

أيضا س = ص

إذن التخمين غير صحيح لأنه لا توجد ٣ أعداد صحيحة مختلفة تحقق المعادلة. (دحض)

الادعاء في المهمة السابقة هو أن ثلاثة أعداد صحيحة مختلفة تحقق المعادلة المعطاة. استخدمت دينا المثال (ع =٠) كمبرر لدحض التخمين وذلك لأن الصفر ليس من الأعداد الصحيحة الموجبة. استخدمت دينا وعلياء أمثلة أخرى (دليل) لدعم ادعائهما بأن الحالة الوحيدة لتحقيق المعادلة هو أن ع = صفر. ثم قامت الطالبتان بتجريب أمثلة أخرى للحدين ع، س، ولكنهما اكتشفا أن س =ص الأمر الذي جعلهما يرفضان صحة التخمين. استخدمت الطالبتان أدلة إضافية (دعم) باستخدام أمثلة أخرى للحدين ع، س، ولكنهما وجدا أيضا أن س = ص الأمر الذي جعلهما يرفضان صحة التخمين مع درجة من الثقة.

ثانيا: المعوقات التي أعاقت بعض طالبات المرحلة الثانوية من الاستفادة من الأمثلة في فهم وتطوير البرهان الرياضي:

من خلال تحليل إجابات الطالبات والحديث الذي دار بينهن، تم تحديد بعض المعوقات التي أعاقت بعض الطالبات عن الاستفادة من الأمثلة في فهم وتطوير البرهان. هذه المعوقات هي: استخدام أمثلة مؤكدة متنوعة، استخدام أمثلة تجريبية بطريقة عشوائية، عدم إدراك دور الأمثلة المضادة، القفز إلى الحلول الجبرية. فيما يلي شرح هذه المعوقات بشيء من التفصيل:

استخدام أمثلة مؤكدة متنوعة:

اعتقدت بعض الطالبات أن أثبات أن التخمين ينطبق على مجموعة متنوعة من الأمثلة كفيل أن يثبت أن التخمين صحيح دائما. على سبيل المثال، عند العمل مع المهمة (٣)، استخدمت أروي ومنة عدداً كبيراً من الأمثلة المؤكدة للتخمين لأقناع أنفسهما أن التخمين صحيح دائما. استخدامهما للأمثلة لم يعطهما أي فكرة عن كون التخمين خاطئ في بعض الحالات:

أروي: $\frac{٥}{٧}$ ، $\frac{٧}{٩}$ ---- $\frac{٦}{٨}$ تقع بينهما، ٦ تقع بين ٥،٧، ٨ تقع بين ٧، ٩

نأخذ كسرين آخرين، نأخذ أرقام كبيرة

$\frac{٢١}{١٩}$ ، $\frac{١٥}{٧}$ ---- $\frac{١٨}{١١}$ تقع بينهما

منه: $\frac{٨}{٦}$ ، $\frac{٤}{٢}$ ---- $\frac{٦}{٤}$ تقع بينهما

$\frac{٢}{٣}$ ، $\frac{٥}{٧}$ ---- $\frac{٣}{٥}$ تقع بينهما

أحنا جربنا كسور كتير كلها بتأكد أن التخمين صحيح.

استخدام أمثلة تجريبية بطريقة عشوائية:

استخدمت بعض الطالبات أمثلة تجريبية بطريقة عشوائية بدون محاولة البحث عن نمط بين الأمثلة أو استخدام استراتيجية معينة عند اختيار الأمثلة مما منعن من الاستفادة من الأمثلة في البرهان. على سبيل المثال، عند العمل مع المهمة (١)، استخدمت مجموعة سالي وسمر عدداً كبيراً من الأمثلة كمحاولة لأثبات التخمين بدون اختيار الأمثلة بناء على استراتيجية معينة وبدون القيام بتحليل الأمثلة بطريقة تساعدهما على ملاحظة الخصائص الهيكلية للأمثلة التي قد تقود إلى فكرة عن تطوير البرهان (مثل أن المجموع يساوي العدد الأوسط مضروب في ٥). وبالتالي لم تستطيعا أن تفهما من خلال الأمثلة لماذا التخمين صحيح، كما يتضح من الحوار التالي:

سالي: ١+٢+٣+٤+٥ /٥ = ١٥/٥= ٣ √

سمر: نجرب أعداد تاني:

٥+٦+٧+٨+٩ /٥ = ٣٥/٥ =٧ √

سالي: نجرب ارقام كبيرة:

٥٥+٥٦+٥٧+٥٨+٥٩/٥ = ٢٨٥/٥ = ٥٧ √

١٢٠+١٢١+١٢٢+١٢٣+ ١٢٤= ٦١٠ √

سمر: التخمين صحيح

الباحثة: لماذا؟
سمر: لأننا جربنا ارقام كثيرة مختلفة ومنها أرقام كبيرة ووجدنا أن كلها تقبل القسمة على ٥
الباحثة: لماذا هذه الأرقام تقبل القسمة على ٥؟
سالي، سمر: صمت.

عدم إدراك دور الأمثلة المضادة:

لم تدرك بعض الطالبات دور المثال المضاد في البرهان مما منعهن من الاستفادة منه. فلم تدرك بعض الطالبات أن مثالاً مضاداً واحداً يكفي لدحض التخمين حتى لو كان هناك الكثير من الأمثلة المؤيدة للتخمين. على سبيل المثال، في مهمة (٣)، رغم أن جوليا وجينا جاءتا بمثال لا يحقق التخمين، إلا أنهما حاولتا الاتيان بمثال اخر لا يحقق التخمين بدون الوعي أن مثال واحد مضاد يكفي لدحض التخمين، كما يتضح من الحوار التالي:

جوليا: نجرب $\frac{٤}{٨}$ ، $\frac{٦}{١٠}$، على تخمين هذا الطالب، يبقي الكسر اللي مفروض يقع بينهما هو $\frac{٥}{٩}$، على أساس أن ٥ تقع بين ٤، ٦، و٩ تقع بين ٨، ١٠. وفعلا $\frac{٥}{٩}$ تقع بين $\frac{٤}{٨}$ ، $\frac{٦}{١٠}$

جينا: كده التخمين ده صحيح لأننا جربنا مثالين.

جينا: هل لازم تكون أرقام البسوط والمقامات بينها واحد؟ ماذا لو كانت أرقام البسط والمقام بينها أكثر من رقم ذي مثلا $\frac{٥}{٧}$ ، $\frac{٩}{١٠}$ ؟ المفروض حسب هذا التخمين $\frac{٦}{٨}$ ، $\frac{٧}{٩}$ تقع بين هذه الكسور. وبالفعل هي تقع بينها. يبقي التخمين صحيح

جوليا: ثواني.. بحسب كلام الطالب الكسر $\frac{٨}{٨}$ يجب أن يقع بين الكسرين (تقصد $\frac{٥}{٧}$ ، $\frac{٩}{١٠}$) لأن ٨ تقع بين ٥، ٩، و٨ تقع بين ٧، ١٠. لكنها (تقصد $\frac{٨}{٨}$) لا تقع بينهما.. لأنها تساوي واحد (دحض١)

جينا: كمان $\frac{٦}{٩}$ لا تقع بينهما (دحض ٢) لكن $\frac{٧}{٨}$ تقع بينهما.

جوليا: هنشوف كسور تاني ولا كفاية كدة؟!

القفز إلى الحلول الجبرية:

أحد العوامل التي أعاقت بعض الطالبات من الاستفادة من الأمثلة هو القفز إلى الحلول الجبرية كملاذ أول لإثبات التخمين. كانت هؤلاء الطالبات في كثير من الأحيان حريصات على الإثبات، لكن القفز إلى الجبر أعاق محاولاتهن للإثبات، خاصة أن اللجوء إلى الجبر لم يكن مثمرا في بعض المهام بل وجعل المهمة أكثر صعوبة.

يتضح ذلك في حل دينا لمهمة (٦) حيث حاولت إثبات التخمين جبريا بدلا من محاولة استكشاف التخمين باستخدام أمثلة معينة:

دينا: ممكن نعملها جبري

س(س+١) (س+٢) (س+٣)

(س^{٢}+س) (س^{٢}+٥س+٦)

س^{٤}+٥س^{٣}+٦س^{٢}+س^{٣}+٥س^{٢}+٦س

س^{٤}+ ٦س^{٣}+ ١١س^{٢}+ ٦س

بقيت دينا مرتبكة بشأن حقيقة التخمين أو كيفية إثباته، وفقط بعد محاولة طويلة لإثبات التخمين باستخدام الجبر تحولت دينا إلى أمثلة. بمجرد أن اختارت أمثلة لفهم التخمين، على وجه التحديد (١× ٢× ٣× ٤) و (٥×٦ ×٧ ×٨)، استطاعت دينا استنتاج أن التخمين صحيح بالنسبة لـ ٤ أرقام متتالية. ومع ذلك، لم تستطع دينا معرفة سبب صحة التخمين، وعلقت بأنها لا تعرف كيف تثبت ذلك.

مناقشة النتائج:

أدت الأمثلة أدوارا مختلفة مما جعلها مفيدة لكل الطالبات ولكن بدرجات مختلفة. فقد لعبت الأمثلة دورا في مساعدة الطالبات على فهم التخمينات أو العبارات الرياضية.

كجزء من الاستكشاف الأولي للتخمين، استخدمت الطالبات الأمثلة لفهم العبارة الرياضية. تتفق هذه النتيجة مع دراسة كل من: (Alcock & Weber, 2010; Ellis et al., 2012; Lynch & Lockwood, 2019; Laamena et al., 2018; Ozgur et al. , 2019) التي وجدت أن الغرض الأكثر شيوعًا الذي استخدم فيه المشاركون الأمثلة هو فهم العبارات الرياضية. في البحث الحالي، بدت بعض الطالبات في البداية غير متأكدات من طبيعة العلاقة المعطاة في المهمة. فاستخدمن الأمثلة في محاولة لتطوير صورة للعلاقة المعطاة والحصول على فهم ليتمكن من المضي قدما في المهمة.

كذلك لعبت الأمثلة دورا في تقييم صحة العبارات الرياضية. بعد أن قامت الطالبات بقراءة وفهم المشكلة عن طريق التفكير بصوت مرتفع في المشكلة، قمن بالتحقق من صحة العبارة الرياضية. استخدمت الطالبات الأمثلة كأدلة تجريبية لأقناع أنفسهن بصحة أو خطأ العبارة الرياضية. تتفق هذه النتيجة مع دراسة كل من: (Alcock & Weber, 2010; Ellis et al., 2012; Lynch & Lockwood, 2019; Ozgur et al. , 2019) التي وجدت أن من أول الخطوات التي قام بها الطلاب عند العمل مع المهمة هو اختبار ما إذا كان التخمين صحيحا أو خاطئا بتطبيقه على عدد من الأمثلة.

علاوة على ذلك، ساعدت الأمثلة الطالبات على تبرير صحة العبارات الرياضية بناء على ملاحظة الهياكل الرياضية. تتفق هذه النتيجة مع الدراسات السابقة (Aricha-Metzer & Zaslavsky, 2019; Ellis et al., 2019; Ellis et al., 2012; Laamena et al., 2018; Lynch & Lockwood, 2019; Ozgur et al. , 2019) التي وجدت أن الأمثلة أداة قوية لتبرير تخمين أو أدعاء. ففي البحث الحالي، استطاعت الطالبات من خلال استخدام الأمثلة شرح سبب صحة (أو خطأ) العبارة الرياضية.

كذلك ساعدت الأمثلة الطالبات على ملاحظة الهياكل الرياضية بين الأمثلة وتعميم تلك الهياكل لتطوير مبررات. تتفق هذه النتيجة مع الدراسات السابقة (Lynch & Lockwood, 2019; Ellis et al., 2019; Ozgur et al. , 2019). في البحث الحالي، قامت الطالبات بالبحث عن نموذج أو بنية رياضية من خلال مجموعة الأمثلة التي اختارتها ولاحظن وجود هيكل رياضي بين الأمثلة. ملاحظة هذا الهيكل الرياضي بين الأمثلة ساعد الطالبات على تبرير لماذا كان التخمين صحيحا. قدرة الطالبات على إنتاج تبريرات صحيحة بعد الاستكشاف المتعمق للأمثلة يدل على أن الاستخدام الاستراتيجي والمدروس للأمثلة يمكن أن يدعم بالفعل تطوير براهين مناسبة رياضيا.

كما أدت الأمثلة دورا في مساعدة الطالبات على تعميم فهمهن ومن ثم توليد تخمينات. تتفق هذه النتيجة مع الدراسات السابقة (Lynch & Lockwood, 2019; Ellis et al., 2019; Lockwood et al., 2016; Ozgur et al. , 2019). لاحظت الطالبات هيكلا رياضيا في أمثلتهن الأولية فقمن بتعميم فهمهن بناء على الهيكل الرياضي الذي تم ملاحظته في الأمثلة. استطاعت الطالبات تعميم فهمهن من خلال التعامل مع الأمثلة على أنها ممثل عام لفئة مع التركيز على الخواص الأساسية للمثال مما ساعدهن على تطوير دليل أو برهان.

بالإضافة إلى ذلك، لعبت الأمثلة دورا في دحض التخمينات حيث استخدمت الطالبات أمثلة مضادة لإثبات أن عبارة رياضية غير صحيحة. تتفق هذه النتيجة مع الدراسات السابقة (Alcock & Weber, 2010; Ellis et al., 2012; Lynch & Lockwood, 2019) والتي استخدم فيها المشاركون أمثلة مضادة لأثبات خطأ تخمين.

جديرا بالذكر أن الطالبات المشاركات في هذا البحث لم تتعلمن بشكل صريح استخدام الأمثلة في البرهان. علاوة على ذلك، في كثير من الحالات، انتقلت الطالبات من عدم التمكن من شرح سبب صحة (أو خطأ) العلاقة الرياضية إلى القدرة على تبرير صحتها (أو خطأها) نتيجة لاستخدام الأمثلة. وبالتالي، تشير النتائج إلى حد كبير إلى نقاط القوة والضعف الطبيعية للطالبات فيما يتعلق باستخدام الأمثلة في البرهان. هذا

يشير إلى أنه ينبغي اعطاء المزيد من الاهتمام لتسهيل قدرة الطلاب على استخدام الأمثلة في البرهان والاستفادة من نقاط القوة المحتملة لديهم لاستخدام الأمثلة في البرهان. ولذا يقترح البحث الحالي أن يكون دعم تفكير الطلاب بالأمثلة جزءًا منظمًا من نشاط الفصل.

وبالرغم من الأدوار التي لعبتها الأمثلة في البرهان، إلا أنه ليس كل الطالبات استفدن من استخدام الأمثلة في البرهان. من المعوقات التي أعاقت بعض الطالبات من الاستفادة من الأمثلة في البرهان الرياضي اعتقاد بعض الطالبات أن استخدام الكثير من الأمثلة الداعمة للعلاقة الرياضية كفيل بأثباتها، حيث أكثرت بعض الطالبات من الأمثلة التي تؤكد صحة العبارة الرياضية وأغفلت احتمال وجود أمثلة تدحض العبارة الرياضية. تختلف هذه النتيجة مع ما وجده (Buchbinder & Zaslavsky, 2019) حيث وجد أن طلاب المرحلة الثانوية يدركون أن الأمثلة الداعمة غير كافية للإثبات. لكن تتفق هذه النتيجة مع دراسة كل من: (Aricha-Metzer & Zaslavsky, 2019; Antonini et al., 2011; Buchbinde & Zaslavsky, 2013, Ozgur et al. , 2019) التي وجدت أن الطلاب يميلون إلى قبول عبارة ما باعتبارها صحيحة إذا كانت صحيحة بالنسبة لعدد معين من الأمثلة. في الدراسة الحالية، اختبرت بعض الطالبات مجرد أمثلة لمعرفة ما إذا كان التخمين صحيحًا أم لا، ولكن لم يكن هناك أي مؤشر على الرغبة في تجاوز التحقق من التخمين لفهم سبب كونه صحيحًا. وبالتالي، لم تستفد هؤلاء الطالبات من الأمثلة.

كذلك عدم إدراك الطالبات لدور المثال المضاد في البرهان منعهن من الاستفادة منه. فلم تدرك بعض الطالبات أن مثالاً مضاداً واحداً يكفي لدحض التخمين حتى لو كان هناك الكثير من الأمثلة المؤيدة للعبارة الرياضية. وتختلف هذه النتيجة مع ما وجده (Buchbinder & Zaslavsky, 2019)حيث وجد أن طلاب المرحلة الثانوية يدركون أن مثالاً مضاداً واحداً يكفي لدحض عبارة رياضية عامة. يشير هذا إلى ضرورة تصميم الممارسات التدريسية بشكل صريح لمساعدة الطلاب على تعلم دور الأنواع المختلفة من الأمثلة (مثل الأمثلة الداعمة، والأمثلة المضادة) في البرهان.

كذلك كان استخدام الطالبات لأمثلة تجريبية عشوائية بدون وجود هدف أو استراتيجية يتم على أساسها اختيار الأمثلة عائقاً آخر منع الطالبات من الاستفادة من الأمثلة في البرهان. تتفق هذه النتيجة مع دراسة (Ozgur et al. , 2019; Pedemonte & Buchbinder, 2011) التي وجدت أن الطلاب الذين فشلوا في البرهان لم يستخدموا الأمثلة بشكل هادف أو استراتيجي ولكنهم اعتمدوا على استراتيجية التنوع لإقناع أنفسهم بصحة العبارات الرياضية. يشير هذا إلى ضرورة تصميم الممارسات التدريسية بشكل صريح لمساعدة الطلاب على تعلم كيف يمكن استخدام الأمثلة ليس فقط للتحقق ولكن أيضا لكشف العلاقات الهيكلية وتوليد التخمينات. كذلك ضرورة

تصميم طرق التدريس لمساعدة الطلاب على تعلم التفكير الاستراتيجي واستخدام الأمثلة بطريقة منتجة في البرهان.

كذلك من العوامل التي أعاقت بعض الطالبات من الاستفادة من الأمثلة هو القفز إلى الحلول الجبرية كملاذ أول لإثبات التخمين. تتفق هذه النتيجة مع دراسة (Ozgur et al. , 2019). قد يرجع قفز بعض الطالبات إلى الحل الجبري إلى قلة وعيهن بأهمية الأمثلة وبكيفية الاستفادة منها في تطوير برهان ناجح. يشير هذا إلى أهمية خلق الفرص حتى يتمكن الطلاب من اختبار فائدة الأمثلة في البرهان.

توصيات البحث:

في ضوء النتائج التي توصل إليها البحث، توصي الباحثة بما يلي:

- تشجيع معلمي الرياضيات على استخدام الأمثلة في تدريسهم وأن يناقشوا مع الطلاب الأدوار التي تلعبها الأمثلة أثناء بناء البرهان الرياضي.
- أن يتلقى الطلاب في جميع مستويات الصفوف تعليمًا صريحًا حول كيفية التفكير الاستراتيجي في الأمثلة وتحليلها أثناء الأنشطة المتعلقة بالبرهان الرياضي.
- تصميم الممارسات التدريسية التي تعلم الطلاب دور الأنواع المختلفة من الأمثلة (مثل الأمثلة الداعمة، والأمثلة المضادة) من أجل تعلم تطوير البراهين.
- تعليم الطلاب استخدام وتحليل الأمثلة، ليس فقط من أجل الحصول على فهم أفضل للعبارات الرياضية ولكن أيضا من أجل تعلم تطوير إثبات هذه العبارات.
- خلق الفرص حتى يتمكن الطلاب من اختبار فائدة الأمثلة في البرهان حتى يقدرون قيمة الأمثلة في البرهان.

البحوث المقترحة:

في ضوء النتائج التي توصل إليها البحث، تقترح الباحثة إجراء البحوث التالية:

- الاستمرار في دراسة الأدوار التي يمكن أن تلعبها الأمثلة في دعم تعلم طلاب المدارس الثانوية للبرهان الرياضي.
- تصميم واختبار التدخلات التعليمية التي تهدف إلى مساعدة الطلاب على تعلم التفكير الاستراتيجي في الأمثلة في الأنشطة المتعلقة بالبرهان الرياضي.
- تطوير واختبار التدخلات التعليمية المصممة لمساعدة المعلمين على تعزيز وتنمية التفكير في الأمثلة واستخدامها بشكل منتج لتطوير تعلم الطلاب للبرهان الرياضي.

المراجع:

أولا المراجع العربية:

إبراهيم، شروق جودة (٢٠١٨). *استخدام استراتيجيات التعلم المنظم ذاتيا في تدريس الرياضيات لتنمية مهارات البرهان الهندسي والترابطات الرياضية لدى طلاب المرحلة الثانوية*. رسالة دكتوراه. جامعة الفيوم.

التخاينة، بهجت محمد (٢٠١٨). أثر استخدام استراتيجية التفكير فوق المعرفي في تنمية البرهان الرياضي والتحصيل لدى طلبة المرحلة الأساسية في وحدة الدائرة. *مجلة جامعة الأزهر-غزة*، ٢٠(١)، ٧٩-٩٨.

الجوعاني، مجبل حماد ومحمد، فاضل عباس (٢٠١٣). مهارات البرهان الرياضي لدى طلبة الصف الثالث المتوسط. *مجلة القادسية في الآداب والعلوم التربوية، جامعة القادسية*، ١٢(٣-٤)، ٣٧٧-٤٣٤.

الخطيب، محمد (٢٠١٢). أثر تدريس الهندسة باستخدام التعليم القائم على التفكير الرياضي بالتوصل للنظريات الرياضية وبرهانها وتطبيقاتها لدى طلاب الصف العاشر الأساسي في الأردن. *دراسات العلوم التربوية*، ٣٩(١)، ٨١-٩٦.

روفائيل، عصام وصفي ويوسف، محمد أحمد (٢٠٠١). *تعليم وتعلم الرياضيات في القرن الحادي والعشرين*. القاهرة، مكتبة الأنجلو المصرية.

صلاح، صلاح أحمد فؤاد (٢٠١٢). *فاعلية برنامج إثرائي مقترح لتنمية مهارات البرهان الرياضي والتفكير الإبداعي لدى طلاب الصف الأول الثانوي باستخدام لغة البرمجة بالحاسوب*. رسالة دكتوراه. جامعة القاهرة.

عبيد، وليم تاوضروس (٢٠٠٤). *تعليم الرياضيات لجميع الأطفال في ضوء متطلبات المعايير العالمية وثقافة التفكير*. الأردن: دار المسيرة للنشر والتوزيع.

العنزي، علي بن عبد الله (٢٠١٩). دراسة طبيعة البرهان الرياضي لدى الطلاب المعلمين بكلية التربية-جامعة جازان. *مجلة العلوم التربوية*، ٢٧(٢)، ٢٤٦-٢٧٦.

غضبان، محمد عبد الوهاب دولاني (٢٠١١). *أثر اختلاف مستويات التوجيه في برنامج الكمبيوتر متعدد الوسائط على تنمية مهارات البرهان الرياضي لطلاب الصف الأول الثانوي*. رسالة دكتوراه. جامعة القاهرة.

موسى، محمد موسى محمد (٢٠١١). *فاعلية استخدام خرائط التفكير في تنمية كل من مهارات البرهان الرياضي والتفكير الإبداعي والتحصيل في الهندسة لدى طلاب الصف الأول الثانوي*. رسالة دكتوراه. جامعة القاهرة.

هلال، سامية (٢٠٠٧). فعالية استراتيجية مقترحة في تدريس الهندسة لتنمية مهارات البرهان الرياضي لدى تلميذات المرحلة المتوسطة. *المؤتمر العلمي السابع- الرياضيات للجميع*، القاهرة، يوليو، ١٤٨-١٧٩.

الهيئة القومية لضمان جودة التعليم والاعتماد (٢٠٠٩). *وثيقة المستويات المعيارية لمحتوى مادة الرياضيات للتعليم قبل الجامعي*.

ثانياً: المراجع الأجنبية:

Alcock, L., & Weber, K. (2010). Undergraduates’ example use in proof construction: Purposes and effectiveness. *Investigations in Mathematics Learning*, 3(1), 1–22.

Antonini, S., Presmeg, N., Mariotti, M., & Zaslavsky, O. (2011). On examples in mathematical thinking and learning. *ZDM Mathematics Education*, 43, 191–194.

Aricha-Metzer, I., & Zaslavsky, O. (2019). The nature of students’ productive and non-productive example- use for proving. *Journal of Mathematical Behavior*, 53, 304–322.

Bills, L., Dreyfus, T., Mason, J., Tsamir, P., Watson, A., & Zaslavsky, O. (2006). Exemplification in mathematics education. In J. Novotna (Ed.), *Proceedings of the 30th conference of the international group for the psychology of mathematics education*, Vol. 1, (pp. 126–154). Prague, Czech Republic: PME.

Buchbinder, O., & Zaslavsky, O. (2013). A holistic approach for designing tasks that capture and enhance mathematical understanding of a particular topic: The case of the interplay between examples and proof. In C. Margolinas (Vol. Ed.), *Proceedings of ICMI Study 22: Task Design in Mathematics Education Conference*, Vol. 1, (pp.27–35).

Buchbinder, O., & Zaslavsky, O. (2019). Strengths and inconsistencies in students’ understanding of the roles of examples in proving. *Journal of Mathematical Behavior*, 53, 129–147.

Creswell, J. W. (2014). *Research design qualitative, quantitative and mixed methods approaches* (4th ed.). Thousand Oaks, CA Sage.

Ellis, A., Lockwood, E., Williams, C., Dogan, M. F., & Knuth, E. (2012). Middle school students’ example use in conjecture exploration and justification. In L. R. Van Zoest, J. J. Lo, & J. L. Kratky (Eds.), *Proceedings of the 34th annual meeting of the north American chapter of the international group for the psychology of mathematics education* (pp. 135–142). Kalamazoo, MI: Western Michigan University.

Ellis, A., Ozgur, Z., Vinsonhaler, R., Dogan, M., Carolan, T., Lockwood, E., Lynch, A., Sabouri, P., Knuth, E., & Zaslavsky, O. (2019). Student thinking with examples: The criteriaaffordances-purposes- strategies framework. *Journal of Mathematical Behavior*, 53, 263–283.

Georgia Department of Education (2006). *The Georgia performance standards for (K-12) mathematics.* Kathy Cox, State Superintendent of School.

Iannone, P., Inglis, M., Mejia-Ramos, J. P., Simpson, A., & Weber, K. (2011). Does

generating examples aid proof production? *Educational Studies in Mathematics*, 77, 1–14.

Kloosterman, P., & Lester, F. (2004). *Results and interpretations of the 1990 through 2000 mathematics assessments of the National Assessment of Educational Progress*.

Knuth, E., Choppin, J., & Bieda, K. (2009). Middle school students' production of mathematical justifications. In D. Stylianou, M. Blanton, & E. Knuth (Eds.). *Teaching and learning proof across the grades: A K-16 perspective* (pp. 153–170). New York, NY: Routledge.

Knuth, E., Zaslavsky, O., & Ellis, A. (2019). The role and use of examples in learning to prove. *Journal of Mathematical Behavior*, 53, 256–262.

Laamena, C. M., Nusantara, T., Irawan, E. B., & Muksar, M. (2018). How do the undergraduate students use an example in mathematical proof construction: A study based on argumentation and proving activity. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, 13(3), 185-198.

Leron, U., & Zaslavsky, O. (2013). Generic proving: Reflections on scope and methods. *For the Learning of Mathematics*, 33(3), 24–30.

Lockwood, E., Ellis, A., & Lynch, A. (2016). Mathematicians' example-related activity when exploring and proving conjectures. *International Journal Research Undergraduate Math Education*, 2, 165–196.

Lockwood, E., Ellis, A., & Knuth, E. (2013). Strategically chosen examples leading to poof insight: A case study of a mathematician's proving process. In M. Martinez, & A. Castro Superfine (Eds.). *Proceedings of the 35th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the*

Psychology of Mathematics Education. Chicago, IL: University of Illinois at Chicago.

Lynch, A., & Lockwood, E. (2019). A comparison between mathematicians' and students' use of examples for conjecturing and proving. *Journal of Mathematical Behavior*, 53, 323–338.

McMillan, J. (2008). *Educational research: Fundamentals for the consumer* (5th ed.). Boston: Pearson.

Mejía-Ramosa, J. P., & Inglish, M. (2008). What are the argumentative activities associated with proof? In M. Joubert (Ed.), *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics*, 28(2), 67–72.

Merriam, S. (1998). *Qualitative research and case study applications in education: Revised and expanded from case study research in education*. San Francisco: Jossey-Bass Publication.

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: Author.

Toulmin, S. E. (2003). *The uses of argument (Second Ed.).* Cambridge, UK: Cambridge University Press.

Ozgur, Z., Ellis, A., Vinsonhaler, R., Dogan, M., & Knuth, E. (2019). From examples to proof: Purposes, strategies, and affordances of example use. *Journal of Mathematical Behavior*, 53, 284–303.

Pedemonte, B., & Buchbinder, O. (2011). Examining the role of examples in proving processes through a cognitive lens: The case of triangular numbers. ZDM: The International Journal on Mathematics Education, 43(2), 257–267.

Sandefur, J., Mason, J., Stylianides, G. J., & Watson, A. (2013). Generating and using examples in the proving process. *Educational Studies in Mathematics*, 83(3), 323–340.

Watson, A., & Shipman, S. (2008). Using learner generated examples to introduce new concepts. *Educational Studies in Mathematics*, 69, 97–109.

Yang, K. L., Lin, F. L., & Wang, Y. T. (2007). Reading strategies for comprehending geometry proof. In H. Woo, H. Lew, K. Park & D. Seo (Eds.), *Proceedings of the 31st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 1, p. 333).

Yin, R. (2009). *Case study research: Design and methods* (4st ed.). Los Angeles: Sage.

Zaslavsky, O. (2014). Thinking with and through examples. In P. Liljedahl, C. Nicol, S. Oesterle, & D. Allan (Eds.). *Proceedings of the joint meeting of PME 38 and PME-NA 36*, v.1 (pp. 21–34). Vancouver, Canada: PME.

Zaslavsky, O. (2019). There is more to examples than meets the eye: Thinking with and through mathematical examples in different settings. *Journal of Mathematical Behavior*, 53, 245–255.

Zaslavsky, O., & Knuth, E. (2019). The complex interplay between examples and proving: Where are we and where should we head? *Journal of Mathematical Behavior*, 53, 242–244.

Zaslavsky, O., Nickerson, S. D., Stylianides, A., Kidron, I., & Winicki-Landman, G. (2012). The need for proof and proving: mathematical and pedagogical perspectives. In G. Hanna, & M. de Villiers (Eds.). *Proof and proving in mathematics education* (pp. 215–229). New York: Springer.