تحسين بناء الفهم الجبري وترقيته لتلاميذ الصف الثاني الإعدادي في بيئة تعلم تستند الي التمثيلات الرياضية

Promoting the development of 8th. grade students' algebraic understanding through *a mathematical representations*-based learning environment

بحث مشتق من رسالة ماجستير

أ/ فاطمة حماده بسيوني أبو صيرة
معيدة بقسم المناهج وطرق تدريس الرياضيات
كلية التربية – جامعة طنطا
fatma_hamada@edu.tanta.edu.eg

إشراف

أ.د/ يوسف الحسيني الإمام
أستاذ تربويات الرياضيات المتفرغ
كلية التربية ـ جامعة طنطا

د/ رمضان مسعد بدوي
مدرس المناهج وطرق تدريس الرياضيات المتفر غ
كلية التربية ـ جامعة طنطا

المستخلص:
يستهدف البحث الحالي استقصاء فعالية بيئة تعلم تستند إلى توظيف التمثيلات الرياضية في تحسين بناء الفهم الجبري وترقيته لدى تلاميذ المرحلة الإعدادية. وفي إطار تحقيق هذا الهدف قدم البحث تصورًا إجرائيًا لمعالجة تدريسية لجبر الصف الثاني الإعدادي، يتوقع أن تعمل على تحسين بناء الفهم الجبري وترقيته. إستندت المعالجة إلي توظيف نموذج فان دي وال للتمثيلات الجبرية. وقد تضمنت منهجية البحث توظيفًا للتصميم شبه التجريبي في مجموعتين (تجريبية ومقارنة). تم جمع البيانات من خلال القياس البعدي لأداء التلاميذ علي إختبار الفهم الجبري بمكوناته الثلاثة: فهم المفاهيم الجبرية، فهم الإجراءات الجبرية، وحل المشكلات الجبرية، وبطاقة ملاحظة لأداء التلاميذ على مؤشرات الفهم الجبري. وكشفت نتائج تحليل البيانات الكمية باستخدام اختبار (ت) لعينتين مستقلتين عن فروق دالة إحصائياً بين متوسطات المجموعة التجريبية والمجموعة المقارنة علي الإختبار ومكوناته، مما يشير إلي تميز جوهري في أداء تلاميذ المعالجة التجريبية في مستوى ممارسات سلوكيات الفهم الجبري. وقد تضمن البحث عددا من المضامين لكل من الممارسة والبحث.

Abstract:
The present research aims to investigate the effectiveness of employing a mathematical representation model in the context of a learning environment for teaching 2nd prep algebra, in promoting students' algebraic understanding. An experimental treatment for teaching 2nd prep algebra, based on Van de walle model of mathematical representation, was designed and implemented throughout 2018-2019 school year. Ninety 2nd Prep students participated in a quasi-experimental design study with two groups (Experimental vs Comparison). Data of algebraic understanding was collected using a test combines multiple tests: understanding of algebraic concepts, procedural understanding, and algebraic problem-solving tests. The results of data analysis using t-test revealed statistically significant differences, between the scores means of the two groups, in favor of the experimental group, for the overall understanding test and for each test separately.

الخلفية النظرية للبحث:

يشهد مجال التربية تحديات كبيرة نتيجة التغيرات المتلاحقة في فروع العلم المختلفة. الأمر الذي يؤدى إلى ضرورة تطوير مستمر للمنظومة التعليمية بشكل متكامل، ومحاولة استحداث وتطوير المناهج الدراسية وطرق تدريسها بما يتناسب مع تزايد وتطور المعارف. إن تقديم المعلومات بنفس الطريقة دون تطوير لا يتوافق مع ما يتسم به هذا العصر من تغير مستمر وتحديات كثيرة. وقد أصبح من الضروري أن يتعلم التلميذ مع الفهم لبقاء أثر المعلومات على المدى الطويل والاستفادة منها عند الحاجة اليها.

والرياضيات مجال متميز لتدريب التلاميذ على أنماط الفهم السليم. لذلك كان من الضروري الاهتمام بالممارسات التدريسية الحالية وربطها بالفهم، أو تطوير ممارسات جديدة تتسق مع معايير الرياضيات المدرسية وأهدافها. وفي ذلك يوضح جيبسون (Gibson, 2015) أن الرياضيات هي أداة لفهم العالم من حولنا، وأن الجبر هو نقطة الانطلاق لدراسة هذا الكون الذي نعيش فيه، وبوجوده يصبح لدينا الأدوات اللازمة لفهم أشياء كثيرة. لذلك لا ينبغي أن نعتبر الجبر قائمة مملة من القواعد والإجراءات اللازمة للحفظ، وإنما يمكن اعتباره بوابة لاستكشاف العالم. كذلك ينبغي التركيز على بناء الفهم الجبري لدى التلاميذ، فتعلم الجبر أمر يمكن أن يحققه الجميع، فقط نحتاج إلى أخذ الامور بالتدريج، وتعلم القواعد الأساسية مع الفهم حتى ننتقل إلى مواضيع أكثر تقدماً.

"الجبر للجميع" هو هدف يتمتع بإجماع معلمي وصناع تربويات الرياضيات. وذلك لكون الجبر يعتبر بوابة إلى التعليم العالي. كذلك ينبغي الاهتمام ببناء الفهم الجبري؛ فليس المطلوب من التلاميذ الانجاز فقط بقدر ما يكون النجاح مطلوباً. ولن يتأتى هذا إلا بالتعلم مع الفهم. والفهم الجبري أصبح عبارة جامعة لتعليم وتعلم الرياضيات لإعداد التلاميذ لخبرات ناجحة في الجبر وغيره. ولكي يستخدم التلاميذ الجبر بشكل له معنى لابد أن يركز التدريس على الفهم، وليس مجرد تداول الرموز، كما يجب أن يحصل التلاميذ على مدار دراستهم للجبر على فرص للتفكير والتحدث حول الإجراءات التي تجرى على الأعداد والكميات حتى يتسنى لهم في النهاية التعبير عن الإجراءات والتفكير فيها باستخدام الرموز الجبرية (بدوي، ٢٠٠٨).

وقد أكد مارك واخرون (Mark et al., 2014) على أهمية مشروع "الانتقال إلى الجبر" والذي تم تطويره من قبل المركز الأمريكي لتطوير التعليم (EDC[1]). وهو أحد موارد الفصل الدراسي الذي يتعامل مع تعليم الجبر بشكل مختلف، بدلاً من إعادة تدريس منهج الجبر نفسه بالطريقة نفسها للطلاب المتعثرين والمكافحين. حيث

[1] **Education Development Center**

تستخدم الألغاز المنطقية والمشكلات والاستكشافات لمساعدة المعلمين على بناء طرق تفكير رياضية لطلابهم بشكل فريد، والانتقال إلى الجبر بسهولة. لذا، كان من الضروري دعم التلاميذ غير القادرين على التفكير جبريًا، والذين يفتقرون إلى الاستراتيجيات الرياضية، ويفتقرون إلى الثقة في أدائهم للرياضيات. وحتى يتسنى للتلاميذ النجاح في الجبر، يجب أن يكونوا قادرين على تحويل تركيزهم من الأعداد نفسها إلى التفكير في العمليات على هذه الأعداد. فهم في حاجه إلى دعم موجه لعبور الجسر من الحساب إلى الجبر بنجاح.

وقد كان هناك تطوراً جذرياً في السنوات الأخيرة تمثَّل في التحول من وثيقة المعايير الصادرة عن المجلس القومي الامريكي لمعلمي الرياضيات (NCTM[٢]) عام ٢٠٠٠ الي مبادرة المعايير الأساسية الموحدة للرياضيات (CCSSM[٣]). وكان الهدف الرئيسي منها توصيف تعلم الرياضيات كعملية نشطة: حيث ينبغي على كل طالب أن يبني معرفته الرياضية من خبراته الشخصية، والانخراط في المهام الصعبة التي تتضمن البناء النشط للمعنى والتعلم ذو المعنى، وربط التعلم الجديد بالمعرفة المكتسبة والتفكير غير الرسمي، ومعالجة المفاهيم المسبقة والمفاهيم الخاطئة، واكتساب المعرفة المفاهيمية والإجرائية؛ حتى يتمكنوا من تنظيم معرفتهم بشكل هادف، واكتساب معرفة جديدة، ونقل وتطبيق المعرفة على المواقف الجديدة، وبناء المعرفة اجتماعيا من خلال الأنشطة والمهام المرتبطة بالمشكلات ذات السياق، وتطوير الوعي بما وراء المعرفة لأنفسهم كمتعلمين وكمفكرين وحلالي مشكلات، وتعلم كيفية مراقبة تعلمهم وأدائهم.

وهناك نقطة انطلاق جديدة للتعلم، فعند النظر الى "**مبدأ التعلم** " وهو أحد المبادئ الستة التي احتوتها وثيقة المبادئ والمعايير للرياضيات المدرسية (NCTM, 2000) نجد أن هذا المبدأ ينص على أن:" ينبغي أن يتعلم الطلاب الرياضيات مع الفهم، وأن يبنوا معرفتهم الجديدة من معارفهم السابقة "

يتفق ويندسور (Windsor, 2010) مع جرينز (Greenes, 2008) علي أن الفهم الجبري يشكل عنصرا مهما وأساسيا في الفهم الرياضي. وأن هذا الفهم يدعم معرفة أعمق وأكثر فائدة. ولابد من جعل الجبر جزء لا يتجزأ من المنهج في المرحلة الابتدائية؛ لأن الفهم الجبري يحسن التفكير اللازم لفهم المفاهيم الجبرية والإجراءات الجبرية. ويشير "ويندسور" في دراسته إلى أن استخدام التعبيرات الرياضية والمعادلات والجداول والرسوم البيانية يساعد التلاميذ على فهم المشكلات ذات الطابع الجبري وحلها. ولكي يفكر الطلاب جبريا يجب عليهم الاتي:

---

[2] **The National Council of Teachers of Mathematics**

[3] **The Common Core State Standards for Mathematics**

- لابد أن يكون لديهم فهم مفاهيمي للأنماط والعلاقات والدوال.
- لابد أن يكونوا قادرين على تمثيل وتحليل المواقف والعلاقات الرياضية.
- لابد أن يستخدموا النماذج الرياضية في تمثيل العلاقات.

وتشير الدراسة الدولية الثالثة للرياضيات والعلوم (TIMSS[4]) إلى أن معلمي الرياضيات والعلوم يركزون على تعليم الطلاب كيف يؤدون الرياضيات؟ وأن اهتماماتهم ليست منصبة على فهم ما يفعلون. ورغم أن الاداء يشمل مزيج من المهارات، والمعرفة، والإجراءات، والفهم، والتفكير، والتطبيق، الا أن التركيز في التدريس عادة ما ينصب على المهارات والمعرفة والاداء دون الاهتمام بالتفكير والفهم .

وقد أوضح هال وآخرون (Hull et al., 2011) أنه على مدى عقود، كان التركيز في الرياضيات المدرسية على المعرفة الإجرائية، وقلة الاهتمام بالسؤال عن جوانب الفهم. وعلي غرار ذلك ما يؤكده كيرين (Kieran, 2011) بضرورة التفكير بدقة في الإجراءات من منظور الفهم؛ حيث إن الإجراءات بطبيعة الحال تنطوي على الفهم بداخلها. فالتعلم عن ظهر قلب ليس هو الحل في الجبر وخصوصا عندما يتعلم الطلاب دون فهم. ويتفق كامينج (Cummings, 2015) مع هذا الطرح ويري أنه من أجل أن يتقن التلميذ الجبر يجب أن يكون لديه فهم للمفاهيم الجبرية، وهذا الفهم يسمح للطلاب بالقدرة على التكيف مع بيئة التعلم، وتشكيل تلك البيئة بما يناسب احتياجاتهم. فالفهم المفاهيمي ليس مجرد فهم ما يجب القيام به؛ وانما أيضا لماذا نقوم به؟ أما الفهم الإجرائي فهو معرفة حتمية للإجراءات؛ أي المعرفة لممارسة أداء بعض المهام.

وقد أكد بيود(Budé, 2007) أن تحسين التعلم يؤدى الى تحسين الفهم المفاهيمي وذلك من خلال تصميم طرق التدريس التي تعمل على تحسين تعلم الطلاب، وجعل الموضوعات أكثر وضوحا وأقرب للفهم، ومن ثم أسهل في تعلمها وذلك باستخدام المواد التعليمية التي تعمل على نمذجة الموضوعات وترسيخها في ذهن المتعلم. وتشير جافن وشيفيلد (Gavin & Sheffield, 2015) إلى أن الطلاب يكتسبون فهمًا أعمق للمفاهيم والإجراءات والقدرة على تعميمها باستخدام المنطق والترميز الجبري.

غالباً ما ينظر إلى الفهم المفاهيمي الجبري والفهم الإجرائي الجبري كوجهين لعملة واحدة للتأكيد على الاهتمام بهما في التدريس، وأن الاهتمام بكل منهما يسهل تعلم المهارات، ويجعل تعلم التلميذ أقل عرضة للخطأ والنسيان. فالفهم الإجرائي كما عرفه كيلباترك (Kilpatrick, 2001): "معرفة متى؟ وكيف؟" تستخدم الإجراءات بشكل

[4] **The Third International Mathematics and Science Study**

مناسب، والمهارة في أداء الإجراءات بمرونة ودقة وكفاءة. فالفهم الإجرائي نحتاجه لدعم الفهم المفاهيمي لقيمة المكان ومعانى الارقام الحقيقية ويحتاج الطلاب لرؤية الإجراءات التي تمكنهم من حل المشكلات داخل الصف بصورة جماعية وليس بصورة فردية وذلك من خلال دراسة الخوارزميات " كإجراءات عامة " وهذا يمكن الطلاب من اكتساب نظرة ثاقبة عن حقيقة " أن الرياضيات بناء جديد على درجة عالية من التنظيم ملئ بالأنماط ويمكن التنبؤ به " ، أن تطوير الإجراءات يكون أداة قوية لاستكمال أداء المهام الروتينية (يوسف الإمام،٢٠٠٥).

ويشير جيرمان-ماكارثي وجيل (Germain-McCarthy & Gill, 2014) إلى أن الفهم المفاهيمي هو الإدراك المتكامل والوظيفي لـلأفكار الرياضية التي تمكن الطلاب من تعلم أفكار جديدة بواسطة ربط هذه الأفكار بما يعرفونه بالفعل. كما أكد المجلس لقومي لمعلمي الرياضيات (NCTM, 2014) على أن الفهم الاجرائي هو القدرة على تطبيق الإجراءات بدقة وكفاءة ومرونة وذلك من خلال:

- نقل الإجراءات الي مشكلات وسياقات مختلفة.
- بناء الإجراءات الي اجراءات اخري وتعديلها.
- التعرف على مدي امكانية تطبيق الإجراءات على موقف آخر.

ولتطوير الفهم الإجرائي يحتاج الطلاب إلى خبرة في دمج المفاهيم والإجراءات وبناء إجراءات مألوفة وتبرير اختياراتهم للإجراءات المناسبة. وذلك يساعدهم على تعزيز فهمهم فمثلا يظهر الفهم الإجرائي في الجبر من خلال تطوير الطلاب إجراءات حل المعادلة التي تطبق في مسائل الفصول الدراسية واختيار الإجراءات الفعالة في حل تلك المسائل؛ فالكثير من الممارسات التدريسية تكون غير فعالة وهذا يؤدي الي قلق الرياضيات لذلك لابد من التخطيط الجيد للتعليمات التي توجه الطلاب ودمج التمثيلات بصورة أساسية في التدريس من أجل تعلم أفضل وفهم قوي للمفاهيم والإجراءات.

وعلى الرغم من وجود تركيز تربوي متزايد على تفكير الطلاب وتبريرهم لتفكيرهم الرياضي الذي ساعد في نقل التدريس بعيدًا عن التدريس الإجرائي، الا أن هناك حاجة إلى المزيد لتطوير فهم الطلاب للرياضيات.

"التمثيلات الرياضية Mathematical representation" مثلت أحد معايير العملية المهة في وثيقة المبادئ والمعايير للرياضيات المدرسية (NCTM, 2000)، وقد نالت إهتماما كبيراً نظراً لأهميتها كأداة للتواصل والتفكير بدلا من كونها مجرد مهارة من مهارات التواصل الرياضي. ووفقا للمعايير التي حددها المجلس القومي الأمريكي لمعلمي الرياضيات (NCTM, 1989)، فإن التمثيل الرياضي يتم من خلال:

- بناء تمثيلات واستخدامها لتنظيم الأفكار الرياضية وايصالها.
- اختيار وتطبيق وترجمة التمثيلات الرياضية لحل المشكلات.
- استخدام التمثيلات الرياضية لنمذجة الظواهر الطبيعية، والاجتماعية، والرياضية وتفسيرها.

كما أكد المجلس القومي لمعلمي الرياضيات (NCTM, 2014) على أن التمثيلات الرياضية تساعد الطلاب في التعرف على العناصر الرياضية المشتركة للمواقف الرياضية المختلفة. ومن خلال التمثيلات يتعزز فهم المفاهيم والإجراءات الرياضية واستخدامها. فعندما يصبح الطلاب قادرين على تمثيل حالة رياضية بطريقة ذات معني بالنسبة لهم؛ يصبح الطلاب قادرين على حل المشكلة. فاستخدام التمثيلات سواء رسوم، أو صور ذهنية، أو مواد ملموسة، أو معادلات يساعد الطلاب على تنظيم تفكيرهم، ويُمكنهم من تجربة توجهات جديدة تؤدي إلى فهم أوضح وإلى حل المشكلات التي تواجههم بنجاح.

وقد أكد "فان دي وال" وآخرون (Van de Walle et al., 2013) على أهمية التمثيلات الرياضية. فالتمثيل له دور حيوي وأساسي في تعميق فهم تعلم الرياضيات؛ وذلك لكون فهم التعلم يكون ممكنا فقط عندما يصبح المفهوم جزءا من شبكة التمثيل الخاصة التي يكونها الشخص بداخله. ويرى" فان دي وال" أن أهمية التمثيلات الرياضية تكمن في أنها تساعد الاطفال على التفكير واختبار افكارهم الناشئة مما يحسن فهمهم بشكل صحيح ويصبح لديهم شبكة غنية من المفاهيم وبالتالي تطوير فهم العلاقات(بدوي، ٢٠٠٣).

فالكثير من تعلم الرياضيات هو في الواقع تعلم تمثيلات، فالرموز الرياضية تستعمل لتمثيل كائنات رياضية مثل: الأعداد والكسور والمعادلات والعمليات الرياضية الحسابية مثل: الجمع والطرح، ولكي يحقق المتعلمون الإتقان في الرياضيات عليهم أن يتعلموا معالجة التمثيلات وفهم معاني ما تمثله من كائنات وعمليات.

وفي هذا الصدد يؤكد جاجتسس واخرون (Gagatsis et al., 2010) على أن التمثيلات ضرورية للفهم المفاهيمي، فالتنقل بالمفهوم من تمثيل لآخر يساعد على إمتلاك المفهوم، ويشير إلى أن السبب الرئيسي الذي يقلل من كفاءة الطلاب في الربط بين المفاهيم والهياكل ذات الصلة بطريقة تعزز المفهوم هو عدم التركيز على التعلم باستخدام التمثيلات الرياضية، فالطريقة الوحيدة للوصول للمفهوم الرياضي والتعامل معه هي باستخدام الإشارات والتمثيلات الرياضية (Duval, 2006).

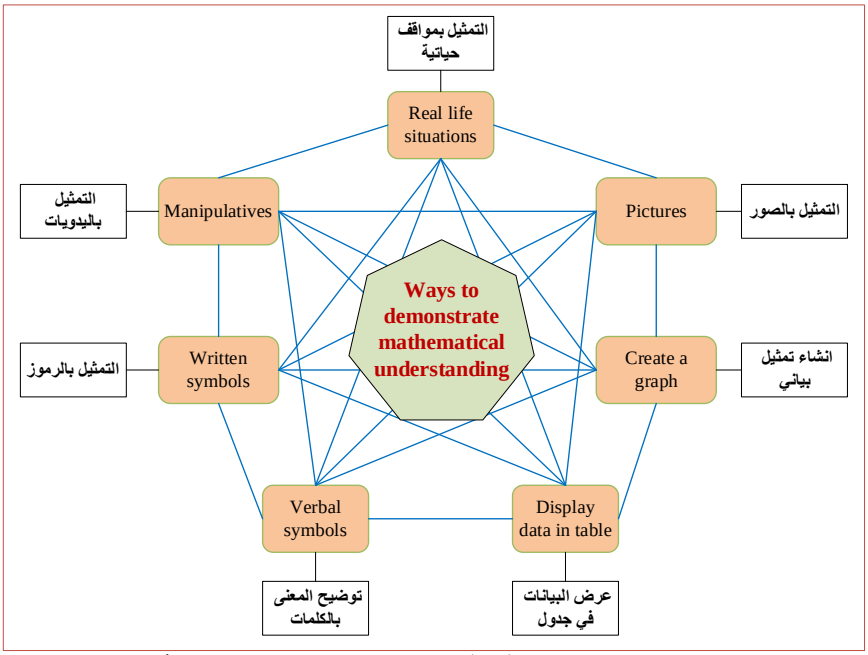
ويحدد فينيل وروان (Fennell & Rowan, 2001). أهمية التمثيلات الرياضية في الآتي:

- التمثيلات هي أدوات تفكير فعالة؛ تجعل الأفكار الرياضية أكثر صلابة، ومتوافرة للتأمل؛ فهي تدعم التفكير وتوسعه عن طريق مساعدة الطلاب على التركيز على الميزات الرئيسة للحالة الرياضية.
- يتعزز فهم المفاهيم والإجراءات الرياضية واستخدامها عندما يستطيع الطلاب نقل الفهم بين تمثيلات مختلفة لنفس الفكرة. ويحتاج الطلاب إلى تطوير واستخدام تنوع واسع من التمثيلات.
- توفر التمثيلات للطلاب أدوات مجدية لبناء الفهم، معلومات الاتصال، وعرض التعليل.
- تساعد التمثيلات الطلاب في التعرف على العناصر الرياضية المشتركة للأوضاع الرياضية المختلفة.

كما يشير دليسي وسيفاملي (Delice & Sevimli, 2010) إلى أن الطلاب يفضلون استخدام التمثيلات الرياضية عند تعلمهم المعادلات الجبرية وحل المشكلات.

نموذج فان دوال للتمثيلات الرياضية:

قدم فان دوال واخرون (Van de Walle et al., 2013) نموذجا للتمثيلات الرياضية لتحسين الفهم الرياضي وهو نموذج موسع ومطور لنموذج ليش للتمثيلات العقلية.



شكل (١) نموذج فان دي وال للتمثيلات الرياضية

١. التمثيل بمواقف حياتية: التمثيل بموقف واقعي بحيث يعبر عن أي سياق يتضمن أفكاراً رياضية ملائمة وتثير اهتمامات التلاميذ.
٢. التمثيل بالصور: يساعد الطلاب في معرفة الكثير عن الافكار الرياضية، من خلال ما يرسمه التلاميذ عن فكرة رياضية معينة، ويمكن أن تستخدم لإثارة مناقشة صفية حول الافكار المستخلصة من الرسم.
٣. عرض البيانات في جدول: تستخدم الجداول للبحث عن نمط وهي أداة لترتيب أفكارنا.
٤. إنشاء تمثيل بياني: نوع من التمثيل المرئي للقاعدة الجبرية، حيث يستخدم الطالب البيانات في الجداول التي كوَّنها لتمثيلها على الشبكة البيانية وذلك لتوضيح ما إذا كان هناك زيادة أو نقصان أو ميل الخط المستقيم.
٥. توضيح المعنى بكلمات: استخدام اللغة المنطوقة عن طريق إبلاغ التلاميذ أجوبتهم، أو إبداء تفكيرهم، فعندما تتاح للتلاميذ الفرص للتعبير عن تفكيرهم على نحو جهوري، فإنهم قد يكونون قادرين على جعل المعرفة التي كانت ضمنية لهم أكثر وضوحا.
٦. الكتابة باستخدام الرموز: من خلال تحويل (اختزال) المشاكل اللفظية الى معادلات لتسهيل حلها، ويتعلق ذلك بكل من الرموز الرياضية والكلمات المكتوبة وكلاهما يرتبط بالآخر وتمثيل الرموز المكتوبة يميل إلى أن يكون أكثر تجريداً للطلاب من التمثيلات الأخرى.
٧. التمثيل باليدويات: استخدام الاشياء الملموسة لتوضيح المعنى.

فعندما يطلب المعلم من طلابه استخدام هذه الأنواع من التمثيلات الرياضية فإن هذا يساعدهم في شرح طريقة تفكيرهم، ويساعد المعلم في جمع معلومات حول فهم طلابه للأفكار المقدمة إليهم. ومن ثم يجب على المعلم أن يركز على استخدام التمثيلات الرياضية لأنها عنصر حاسم في دعم التفكير لدى الطلاب وتقدمهم نحو مزيد من تمثيلات رمزية مجردة. فالفهم الرياضي يمكن توضيحه من خلال التمثيلات المختلفة للأفكار الرياضية، وخصوصا عند وجود ترابط بين كل تمثيل وآخر، فالتلميذ عندما يربط بين مختلف التمثيلات الرياضية وينتقل من تمثيل لأخر بسهولة، فإن ذلك يؤدى إلى ترابط الافكار الرياضية بذاتها.

الإحساس بالمشكلة:

يشير الواقع بالمدارس أن من أصعب المشكلات التي تواجه التلاميذ وخاصة عند انتقالهم من المرحلة الابتدائية إلى المرحلة الإعدادية هي انتقالهم المفاجئ من الحساب إلى الجبر برموزه المجردة. ويشكل هذا عائقا لديهم ويخلق فجوة بين ما تعلموه وما

سيتعلمونه. ونتيجة لذلك نجد أن تعلمهم يقف عند مستوى حفظ واسترجاع الإجراءات دون فهم لما تنطوي عليه من معاني ودلالات.

من خلال ملاحظة الباحثة اثناء التجربة الاستطلاعية لتلاميذ الصف الثاني الإعدادي، تبين أن معظم التلاميذ في دراستهم للجبر يعتمدوا على الحفظ والاستظهار دون فهم. وأن تعلمهم مؤقت من أجل اجتياز الامتحانات فقط. وإذا ما فرغوا من اجتيازه نسوا كل ما تعلموه.فقد قامت الباحثة بعمل اختبار للفهم الجبري ينطوي على أسئلة تقيس كل من مكوناته الثلاثة وبعد تحليل إجابات التلاميذ وجد أن أكثر من ٧٨٪ من التلاميذ لديهم خلط بين فهم المفهوم وفهم إجراءات الحل. في حين أن أكثر من ٩٤٪ ليس لديهم القدرة على حل المشكلات الجبرية ولديهم قناعة تامة أن هذه المشكلات اللفظية الجبرية غير متواجدة في فرع الجبر وخصوصا الوحدات الخاصة بجبر الصف الثاني الإعدادي. ومن ناحية أخرى قدمت الباحثة استبيانات لمعلمي الرياضيات للمرحلة الإعدادية لتقصِّي واقع تدريس الجبر للصف الثاني الإعدادي وممارسات المعلمين لتدريس الجبر ومدي تأكيدهم على فهم التلاميذ للجبر. وأيضا من خلال عملها كمشرفة على طلبة التربية العملي للمرحلة الإعدادية توصلت الي الاستنتاجات التالية:

بالنسبة لمعلمي الرياضيات:

- غياب ثقافة التعلم من أجل الفهم عند المعلمين وبالتالي الأثر السلبي على التلاميذ.
- عدم وجود وعي كافي لاستخدام التمثيلات الرياضية كأدوات داعمة لفهم الرياضيات.
- أحيانا ما يتعرضون لبعض التمثيلات وغالبا ما تتمثل في الجداول والرموز.
- عدم الاهتمام بتدريس المشكلات الجبرية الحياتية نظرا لاقتناع المعلمين أن المشكلات اللفظية غالبا ما تكون في الفروع الأخرى من الرياضيات وليس الجبر لطبيعته المجردة.

بالنسبة للتلاميذ:

- ضعف قدرتهم على التعامل مع المشكلات الجبرية غير المألوفة.
- تدني مستويات الفهم الجبري.
- ضعف فهم التلاميذ المفاهيمي والعلاقي وعدم القدرة على الربط بينهما.
- عدم قدرتهم على الربط بين المفاهيم والإجراءات وبناء إجراءات مألوفة.
- عدم القدرة على تبرير إجراءات الحل التي يقومون بها.
- غياب التمثيلات الرياضية كأدوات تسهم في فهم المشكلات، وبناء النماذج العقلية التي تساعدهم في اختيار الطريقة الأنسب لحلها.

وفي ضوء ما سبق، يتضح تدني مستويات الفهم الجبري بمكوناته الثلاثة (الفهم المفاهيمي، والفهم الإجرائي، وحل المشكلات) لدى التلاميذ عينة البحث، ومن ثم فإن هذا البحث يستهدف بحث تأثير بيئة تعلم صفية تستند إلى نموذج "فان دي وال" للتمثيلات الرياضية في تحسين بناء الفهم الجبري بمكوناته الثلاثة لدى التلاميذ وترقيته.

أسئلة البحث:

في ضوء ما سبق يتمثل سؤال البحث في الآتي:

"ما فاعلية تدريس جبر الصف الثاني الإعدادي من خلال بيئة تعلم صفية تستند الي نموذج "فان دي وال" للتمثيلات الرياضية في تحسين بناء الفهم الجبري بمكوناته الثلاثة (الفهم المفاهيمي، والفهم الإجرائي، وحل المشكلات)؟

حدود البحث:

- اقتصر البحث على تلميذات الصف الثاني الإعدادي من مركز طنطا.
- اقتصرت مكونات الفهم الجبري علي ثلاث مكونات وهي: فهم المفاهيم الجبرية، فهم الإجراءات الجبرية، سلوك حل المشكلات الجبرية.
- اقتصر التطبيق على منهج الجبر للصف الثاني الإعدادي للفصلين الدراسيين الأول والثاني للعام الدراسي (٢٠١٨-٢٠١٩) م.

مصطلحات البحث:

عرفت الباحثة مصطلحات البحث اجرائياً كما يلي:

بيئة تعلم صفية تستند إلى توظيف نموذج "فان دي وال" للتمثيلات الرياضية:

هي بيئة تعلم قائمة على تدريس الرياضيات الفعال والتعلم ذو معني وتتيح التعلم من أجل الفهم. فكل متعلم يستخدم ما يناسبه من التمثيلات الرياضية والتي تتوافق مع نمط تعلمه. حيث ان جميع المهام والأنشطة الصفية قائمة على التمثيلات مما تساعده على الإنجاز الرياضي وبناء تفكير جبري متأصل. فالتمثيلات مدخل لفهم الرياضيات مما تتيح بيئة التعلم المدعومة بالتمثيلات على تركيز اهتمام المتعلم على البنية أو السمات الأساسية للأفكار الرياضية التي تظهر، وإضفاء السياقية على الأفكار الرياضية من خلال ربطها بمواقف العالم الحقيقي، وتطوير القدرات الحسية واللمسية للمتعلّم؛ مما تنمي قدراته على توضيح عمليات التفكير بصورة مفهومة ومن ثَم يتحرّك نحو التجريد.

نموذج "فان دي وال" للتمثيلات الرياضية:

يستند نموذج "فان دي وال" للتمثيلات الرياضية على بناء نموذج متكامل للتمثيلات العقلية. ويتكون هذا النموذج من سبعة أنواع أو مستويات للتمثيلات الرياضية كالآتي:

- التمثيل بمواقف حياتية: التمثيل بموقف واقعي بحيث يعبر عن أي سياق يتضمن أفكاراً رياضية ملائمة وتثير اهتمامات التلاميذ.
- التمثيل بالصور: يساعد في معرفة الكثير عن الأفكار الرياضية، من خلال ما يرسمه التلاميذ عن فكرة رياضية معينة. ويمكن استخدام الرسوم والصور لإثارة مناقشة صفية حول الأفكار المستخلصة من تلك الرسوم.
- التمثيل بجدول: تستخدم الجداول للبحث عن نمط وهي آداه لترتيب الأفكار.
- التمثيل البياني: نوع من التمثيل المرئي للقاعدة الجبرية، وذلك باستخدام البيانات الموجودة في الجداول التي تم أنشاؤها لتمثيلها على الشبكة البيانية، وذلك لتوضيح ما إذا كان هناك زيادة أو نقصان أو ميل الخط المستقيم.
- التمثيل الشفهي بالكلمات والرموز: استخدام اللغة المنطوقة عن طريق إبلاغ التلاميذ أجوبتهم، أو إبداء تفكيرهم، فعندما تتاح للتلاميذ الفرص للتعبير عن تفكيرهم على نحو جهوري، فإنهم قد يكونون قادرين على جعل المعرفة التي كانت ضمنية لهم، أكثر وضوحا .
- التمثيل الكتابي بالكلمات والرموز: من خلال تحويل (اختزال) المشاكل اللفظية الى معادلات لتسهيل حلها، ويتعلق ذلك بكل من الرموز الرياضية والكلمات المكتوبة وكلاهما يرتبط بالآخر وتمثيل الرموز المكتوبة يميل إلى أن يكون أكثر تجريداً للطلاب من التمثيلات الأخرى.
- التمثيل باليدويات: استخدام الاشياء الملموسة لتوضيح المعنى.

بناء الفهم الجبري

يقوم التلاميذ ببناء الحقائق الرياضية الخاصة بهم استنادًا إلى خبراتهم. والفهم هو تغيير هذه الحقائق بينما ينخرط التلاميذ في أعمال وعمليات منسقة؛ كاستقبال الأفكار الرياضية والتعبير عنها ونمذجتها، وطرح الأسئلة، وبناء الحدس، وتوضيح الأفكار ومشاركتها، واقتراح إستراتيجيات للحل، وشرح وتفسير وتوضيح أفكارهم، وتبرير تفكيرهم، والتعامل مع المواقف غير المألوفة وهذا يشكل عمليات الفهم. ويشمل بناء الفهم الجبري ثلاث مكونات:

الفهم المفاهيمي الجبري:

قدرة التلميذ علي فهم المفاهيم والعلاقات والأنماط الجبرية. حيث يبدي التلميذ فهمه للمفاهيم الجبرية من خلال:

- تسمية المفهوم.
- تمثيل المفهوم (بالنماذج واليدويات، وبالرسوم والصور).
- توظيف المصطلحات والرموز المستخدمة لتمثيل المفهوم.
- تفسير المفاهيم والعلاقات المتضمنة في أوضاع مختلفة.
- إنتاج امثلة ولا أمثلة للمفهوم.

- إنتاج التمثيلات الرياضية المناسبة للمفهوم.

الفهم الاجرائي الجبري:

قدرة التلميذ علي التفكير في الموقف المشكل، ووصف وتعليل سبب كون هذا الاجراء بالذات يمكن أن يعطي اجابة صحيحة للمشكلة من خلال سياقها الموصوف. يبدي التلميذ فهمه للإجراءات الجبرية من خلال:

- اختيار الإجراءات المناسبة للموقف الرياضي، وتوظيفها على نحو صحيح.
- التحقق من صحة الإجراءات وتبريرها باستخدام النماذج المحسوسة وشبه المجردة والرمزية.
- توسيع الإجراءات وتعديلها للتعامل مع شروط المشكلة.
- إنشاء الرسوم البيانية وجداول المعلومات.
- تفسير نواتج الخوارزمية في سياق الموقف المشكل.

حل المشكلات الجبرية:

يكمن حل المشكلة في توظيف المخزون المعرفي للطالب في مواقف جديدة. ويبدي التلميذ حله للمشكلات الجبرية من خلال:

- فهم المشكلة من خلال إدراكه للمشكلة الجبرية وصياغتها بتعبيراته الخاصة.
- تحديد مدي كفاية المعلومات المعطاة الواردة في المشكلة الجبرية.
- توظيف استراتيجياته التفكيرية والمعلومات المتاحة.
- نمذجة الموقف المشكل.
- إدراك العلاقات الرياضية بين المعلومات والمطلوب.
- إنتاج طرق الحل وتوسيعها وتعديلها لتشمل مواقف رياضية جديدة.
- الحكم علي صحة الحل ومدى منطقيته.

أهمية البحث:

بالنسبة للمعلم: تفتح للمعلم مداخل وطرق جديدة في تعليم وتعلم الرياضيات، وفي تطوير مفاهيمه عن التعلم من اجل الفهم، وتأثيرات ذلك على العملية التعليمية. كما تساعد معلم المرحلة الإعدادية في تطوير أساليبه، وتأكده من فهم طلابه وليس مجرد حفظهم واستظهارهم لما تعلموه. وعلى ضرورة استخدامه للتمثيلات الرياضية المتعددة بما يتناسب وطبيعة أنماط المتعلمين.

بالنسبة للتلميذ: يقدم البحث أدوات جديدة ومتنوعة لممارسة الجبر في حجرة الصف، مما تساعد التلاميذ على تحسين بناء فهمهم الجبري بمكوناته الثلاث وترقيته، وتهيئ الفرصة للتلميذ للتفكير وتحدى عقله من خلال استخدام التمثيل المناسب .

بالنسبة للقائمين على العملية التعليمية: تقدم لهم رؤية جدية حول أهمية التمثيلات الرياضية، وكيفية إدارة بيئة تعلم صفية تستند إليها. وضرورة تطوير الكتب المدرسية

بما يواكب التوجهات الحديثة في تعليم وتعلم الرياضيات. والاهتمام بالممارسات الرياضية التي تدعم بناء الفهم الجبري لدي التلاميذ.

بالنسبة للباحثين: يتيح هذا البحث للباحثين نموذجا لتطوير أساليب جديدة لتدريس الجبر. وتركيز اهتمامهم على مكونات الفهم الجبري وضرورة تكامل الفهم المفاهيمي والفهم الاجرائي معا في حل المشكلات.

أدوات البحث:

الجدول التالي يبين سؤال البحث ونوع وأدوات جمع البيانات للإجابة عن سؤال البحث:

جدول (١) سؤال البحث ونوع وأدوات جمع البيانات

السؤال البحثي	نوع البيانات المراد جمعها	الأدوات المستخدمة
ما فاعلية تدريس جبر الصف الثاني الإعدادي من خلال بيئة تعلم صفية تستند الي نموذج "فان دي وال" للتمثيلات الرياضية في تحسين بناء الفهم الجبري بمكوناته الثلاثة وترقيته؟	مقارنة معلومات (بيانات) عن مستوي الفهم الجبري (بمكوناته الثلاثة) لدى تلاميذ المجموعتين التجريبية والمقارنة بعد تدريس موضوعات الجبر للمجموعتين: التدريس للمجموعة التجريبية وفق نموذج فان دوال، والتدريس للمجموعة المقارنة وفق الطريقة القائمة.	اختبار الفهم الجبري ويتضمن ثلاث اختبارات فرعية: - - اختبار فهم المفاهيم الجبرية. - اختبار فهم الاجراءات الجبرية. - اختبار سلوك حل المشكلات الجبرية. طبق الثلاث اختبارات على تلاميذ المجموعتين التجريبية والمقارنة عند نهاية التطبيق.

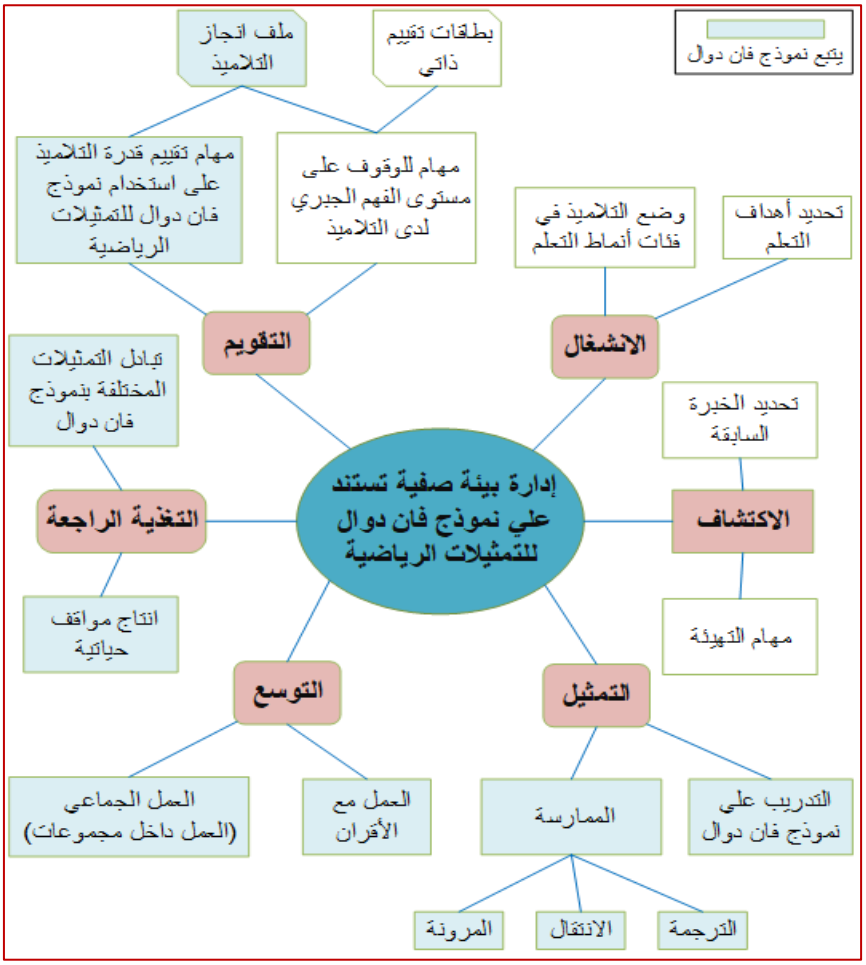
إجراءات تطبيق البحث:

إعداد المعالجة:

- إعداد النموذج الإجرائي لبيئة تعلم صفية تستند إلى نموذج ‘‘فان دي وال’’ للتمثيلات الرياضية (راجع مكونات النموذج في جزء " تحديد المصطلحات").وذلك من خلال تحديد الشروط الخاصة لكل من:
- أهداف التعلم
- تنظيم المحتوى بما يتناسب مع نموذج ‘‘فان دي وال’’ للتمثيلات الرياضية.
- تحديد الممارسات التدريسية التي تدعم بناء الفهم الجبري.
- تحديد المراحل الخاصة بتنفيذ الدرس داخل بيئة تعلم قائمة على نموذج ‘‘فان دي وال’’ للتمثيلات الرياضية.
- إعداد محركات ومقاييس التقويم.
- إعداد قائمة تتضمن مكونات الفهم الجبري والعمليات الرئيسية المكونة له والمؤشرات الدالة عليها.

- إعداد كتاب التلميذ بما يحتويه من مهام وانشطة صفية تدعم المعالجة وفق النموذج الإجرائي الذي سبق تصميمه لبيئة التعلم المستندة لنموذج فان دوال للتمثيلات الرياضية.
- إعداد دليل المعلم كمرشد لبناء بيئة صفية تستند الي نموذج "فان دي وال" للتمثيلات الرياضية لتحسين بناء الفهم الجبري وترقيته.

وتم تحديد المراحل التنفيذية لنموذج "فان دي وال" للتمثيلات الرياضية عمليا داخل الصف الدراسي ويوضحها شكل (٢).



شكل (٢) المراحل التنفيذية لنموذج "فان دي وال" للتمثيلات الرياضية عمليا داخل الصف الدراسي

أدوات جمع البيانات:

اختبار الفهم الجبري ويتضمن ثلاثة اختبارات فرعية:

- اختبار فهم المفاهيم الجبرية.
- اختبار فهم الاجراءات الجبرية.
- اختبار سلوك حل المشكلات الجبرية.

أ) بناء مفردات الاختبار وصياغتها بصورة أولية..

صيغت مفردات الاختبارات الثلاثة لمكونات الفهم الجبري بصورة أولية لتتضمن مجموعة متنوعة من الاسئلة كما يلي:

- **مهمات الاختيار**: اشتملت على أسئلة الاختيار من متعدد المعزز (Enhanced Multiple- Choice)؛ حيث ان كل مفردة تتطلب اختيار مع تبرير لإعطاء الإجابة. والتي هدفت منها الباحثة قياس مستوى فهم المفاهيم الجبرية، فهم الإجراءات الجبرية. وقد تم تحديد درجتين للأسئلة التي تقيس الفهم المفاهيمي الجبري حيث درجة واحدة للإجابة الصحيحة ودرجة على تبرير الإجابة. أما بالنسبة للأسئلة التي تقيس الفهم الإجرائي الجبري تقدر بثلاث درجات حيث يقدر أداء التلميذ في المهمة باستخدام مقياس التقدير المتدرج Rubrics حيث يتم ملاحظة أداء التلميذ في كل مهمة من مهام الاختيار من متعدد وتقييم أدائه وذلك بمقارنة أدائه على المهمة بمستويات الأداء بمقاييس التقدير ليحصل على تقدير أحد المستويات وفقا لتشابه أدائه على المهمة مع توصيف الأداء بمستوى اجابته.
- **مهمات العمليات**: اشتملت على مجموعة من الأسئلة والمهمات اللفظية لتتناسب مع محتوى جبر الصف الثاني الإعدادي والتي تقيس مستوى حل المشكلات الجبرية عددها (٨) مشكلات جبرية، وتنوعت الأسئلة بين ترتيب الأشكال، كتابة التمثيل اللفظي، كتابة التعبير الجبري الذي وصف المشكلة، رسم على الشبكة البيانية، وضع البيانات في جدول، إيجاد مجموعة حل المعادلة من الدرجة الثانية، حساب قيمة مقدار في أبسط صورة. تم بناء مقياس متدرج (Scoring Rubric) لكل مشكلة لتقدير اداء التلاميذ على المشكلة في ضوء المقياس الخاص بها. حيث يتكون كل مقياس من مستويات اداء يصف شكل الإجابة الخاص بكل مستوي، حيث تترجم هذه المستويات الي درجات، وقد يختلف شكل المقياس من حيث عدد مستوياته باختلاف كل مهمة.

ب) ضبط الاختبارات التي تقيس الفهم الجبري

أولًا التحقق من صدق الاختبارات:

تم التأكد من صدق محتوى الاختبارات من خلال صدق المحكمين وذلك بعرضهم (ومع إرفاق جداول المواصفات الخاصة بكل اختبار) على (١٠) من المحكمين للتأكد

من صدقهم كأداة لقياس مستوى الفهم الجبري لدى تلاميذ الصف الثاني الإعدادي وذلك في الفصلين الدراسي الأول والثاني. وطُلب منهم إعطاء آرائهم وملاحظتهم حول:

- مطابقة كل اختبار لجدول المواصفات الخاصة به.
- ارتباط كل مفردة بمؤشر الفهم الجبري الذي يقيسه.
- صحة نظام تقدير درجات مفردات كل اختبار.
- دقة وسلامة الصياغة العلمية واللفظية لمفردات كل اختبار.
- مناسبة كل مفردة لمستوى تلاميذ الصف الثاني الإعدادي.

وبناءً على رؤية السادة المحكمين قامت الباحثة بإجراء التعديلات اللازمة والتي كان منها:

- استبعاد بعض المفردات التي لا تتناسب مع مستوى تلاميذ الصف الثاني الإعدادي.
- إعادة صياغة بعض المفردات نظرًا لغموض فهمها.
- استبعاد بعض المفردات التي لا تقيس الهدف الذي وضعت من أجله (المؤشر الذي نقيسه).

ثانياً: التحقق من ثبات الاختبارات:

تم التأكد من ثبات كل اختبار باستخدام معامل الارتباط بين الفئات باختلاف المُقدِّر (Inter rater reliability). حيث إن هذه الطريقة تتطلب وجود أكثر من مُقدِّر للدرجات (اثنين عادةً)، ومن ثَم استعانت الباحثة بإحدى معلمات الرياضيات بالمدرسة محل التطبيق وناقشتها في هدف الاختبار وكيفية تقدير أداء التلاميذ عن طريق استخدام مقياس تقدير الأداء، وطُلب منها تقدير إجابات ٣٠ تلميذة من تلميذات العينة الاستطلاعية كمياً في الاختبارات الثلاثة لمكونات الفهم الجبري. ويظهر جدول (٢) قيم معامل الثبات Intra- class collation لدرجة الاختبار الكلية ودرجات كل مكون من مكونات الفهم الجبري على حدة، وتُظهر النتائج ارتفاع معامل الثبات مما يمكن الوثوق في نتائجه.

جدول (٢) قيم معاملات الثبات لمكونات اختبار الفهم الجبري باختلاف المُقدِّر

فهم المفاهيم الجبرية	فهم الإجراءات الجبرية	حل المشكلات الجبرية	الاختبار ككل
٠,٩٥	٠,٩٦	٠,٩١	٠,٩٤

الاختبار في صورته النهائية يتضمن (٤٣) مفردة للاختيار من متعدد المعزز، (٨) مشكلات جبرية ملحق(١) بالبحث.

عينة البحث:

تكونت عينة البحث من فصلين ثان إعدادي من مدرسة سبرباي الإعدادية المشتركة، أحدهما تحدد عشوائياً كمجموعة تجريبية (٤٧ تلميذة) والأخري مجموعة مقارنة (٤٣ تلميذة).

التطبيق وجمع البيانات:

يتضمن هذا الجزء ثلاث أنشطة بحثية:

الأول: القياسات القبلية وتحديد تكافؤ المجموعتين التجريبية والمقارنة.

الثاني: إجراءات تطبيق المعالجة.

الثالث: جمع البيانات وتحليل النتائج وتفسيرها.

القياسات القبلية وتحديد تكافؤ المجموعتين التجريبية والمقارنة:

لم يتم تطبيق اختبار الفهم الجبري قبليا نظرا لارتباطه بالمحتوي وكان من غير المنطقي تطبيقه على التلاميذ حيث ان التلاميذ لم يسبق لهم دراسة المحتوي من قبل. وقد اعتمدت الباحثة لتحديد تكافؤ المجموعتين على مستوي التحصيل السابق لدرجات التلاميذ في الاختبار المدرسي لنهاية العام السابق في الرياضيات. وتم اجراء اختبار (ت) لحساب تكافؤ للمجموعتين. بهدف الحصول على البيانات اللازمة لاختبار صحة الفرض الصفري. التالي "لا يوجد فرق دال إحصائيًا عند مستوى دلالة (0.05) بين متوسطي درجات تلاميذ المجموعتين التجريبية والمقارنة في مستوي التحصيل السابق لدرجات التلاميذ في الاختبار المدرسي لنهاية العام السابق. ويلخص جدول (٣) نتائج ذلك.

جدول (٣) اختبار (ت) لمقارنة متوسطي درجات نهاية العام للصف الأول الاعدادي في الرياضيات لتلاميذ المجموعتين التجريبية والمقارنة

Independent Samples t- test									
School test for the end of the previous year	Levene's Test for Equality of Variances		t-test for Equality of Means						
	F	Sig.	t	Df	Sig. (2-tailed)	Mean .Dif	Std. Error .Dif	95% Confidence Interval of the Difference	
								Lower	Upper
Equal variances assumed	4.193	.044	.139	88	.890	.627	4.52	-8.35	9.60
Equal variances not assumed			.137	79.3	.891	.627	4.57	-8.46	9.71

من نتائج الجدول السابق يتبين ان الدلالة الإحصائية لقيمة (t=0.139) تساوي (0.891) مما يعني رصد النتائج في الصف الثاني " Equal variances not

assumed" وهذا يشير الي قبول الفرض الصفري الذي يشير إلى تكافؤ المجموعتين التجريبية والمقارنة.

إجراءات تطبيق المعالجة:

- اختيار عينة البحث وجمع معلومات عن خصائص التلاميذ.
- التهيئة للتطبيق واكتشاف بيئة التعلم والتي استغرقت (٤ أسابيع)، وهدفت الي تهيئة التلاميذ واعدادهم للانخراط في بيئة التعلم القائمة على التمثيلات الرياضية.
- تم تطبيق المعالجة على مدار سنة دراسية كاملة على تلميذات الصف الثاني الإعدادي
- تدريس جبر الصف الثاني الاعدادي وفق نموذج فان دي وال للتمثيلات الرياضية.
- استخدام الأدوات المناسبة لمتابعة تقدم التلاميذ في ممارسة سلوكيات الفهم الجبري اثناء تعرضه للمهام الصفية التي تدعم مكونات الفهم الجبري ومعرفة تأثيرها على أدائه.
- تطبيق اختبار الفهم الجبري بعدياً على تلاميذ المجموعتين التجريبية والمقارنة عند نهاية التطبيق. والذي تضمن ثلاث اختبارات فرعية لمكوناته: اختبار فهم المفاهيم الجبرية، واختبار فهم الاجراءات الجبرية، واختبار سلوك حل المشكلات الجبرية.

جمع البيانات وتحليل النتائج وتفسيرها:

للإجابة عن سؤال البحث الذي ينص على:

"ما فاعلية تدريس جبر الصف الثاني الإعدادي من خلال بيئة تعلم صفية تستند إلى نموذج "فان دي وال" للتمثيلات الرياضية في تحسين بناء الفهم الجبري ككل وتحسين بناء كل من مكوناته الثلاثة (فهم المفاهيم الجبرية، وفهم الإجراءات الجبرية، وسلوك حل المشكلات الجبرية)؟

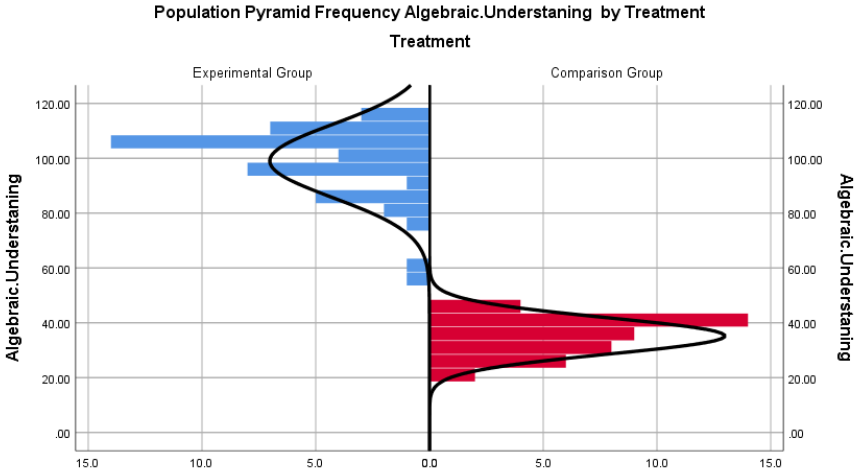
للإجابة عن هذا السؤال البحث تم رصد النتائج الخاصة بالاختبار ككل ثم لكل مكون من المكونات الثلاث للفهم الجبري.

أولا: تحليل البيانات الخاصة بالاختبار ككل:

يوضح جدول (٤) وشكل (٣) الإحصاء الوصفي والتمثيل البياني لدرجات تلاميذ المجموعتين التجريبية والمقارنة على اختبار الفهم الجبري (الكلي).

جدول (٤) الإحصاء الوصفي لدرجات تلاميذ المجموعتين التجريبية والمقارنة على اختبار الفهم الجبري

Descriptive statistics			
Group		Experimental	Comparative
No.		47	43
Mean		99.02	35.21
Std. Error of Mean		1.95	1.01
Median		105	36
Mode		105	40
Std. Deviation		13.35	6.61
Variance		178.24	43.65
Skewness		-1.35	-.256
Std. Error of Skewness		.347	.361
Kurtosis		1.89	-.872
Std. Error of Kurtosis		.681	.709
Range		58	26
Minimum		58	21
Maximum		116	47
Percentiles	25	94	30
	50	105	36
	75	108	40



شكل (٣) نتائج درجات تلاميذ المجموعتين التجريبية والمقارنة على اختبار الفهم الجبري

يتضح من جدول (٤) وشكل (٣) ما يلي:

- ارتفاع متوسط درجات تلاميذ المجموعة التجريبية في الاختبار البعدي للفهم الجبري مقارنة بمتوسط درجات تلاميذ مجموعة المقارنة.

- وبملاحظة الرباعيات؛ نجد أن قيمة الربيعي الأول لدرجات تلاميذ المجموعة التجريبية في الاختبار البعدي بلغت ٩٤ بمعنى أن (٢٥% من عدد التلاميذ حصل على نسبة أقل من ٨١% من درجة الاختبار الكلية) في مقابل قيمة الربيعي الأول لدرجات تلاميذ مجموعة المقارنة حيث حصد ٢٥% من التلاميذ على نسبة أقل من ٢٦% من درجة الاختبار الكلية. وتدل قيمة الربيعي الثاني الوسيط على أن نصف عدد تلاميذ المجموعة التجريبية حصلوا على نسبة أكبر من ٩٠% من درجة اختبار الفهم الجبري الكلية بدلًا من نسبة ٣٣% من درجات تلاميذ المجموعة المقارنة. ويعبر الربيعي الثالث عن تمييز ٢٥% من عدد تلاميذ المجموعة التجريبية والذي حصلوا على نسبة أكبر ٩٣% من درجة الاختبار الكلية بدلًا من نسبة ٣٧% من درجات تلاميذ مجموعة المقارنة.
- اقتراب قيم الوسط والوسيط من قيمة المنوال لدرجات تلاميذ المجموعة التجريبية والمقارنة في اختبار الفهم الجبري يدل على أن المنحنى يقترب من منحنى التوزيع الطبيعي مع وجود نسبة التواء سالبة بلغت قيمتها ١.٧.

ويتبين من البيانات في الجدول أيضاً ميل التوزيع بالنسبة لكل من درجات تلاميذ المجموعتين التجريبية والمقارنة الي الاعتدالية؛ مما يتيح لنا استخدام اختبار (ت).

للتحقق من دلالة الفروق بين متوسطي درجات تلاميذ المجموعتين التجريبية والمقارنة على اختبار الفهم الجبري تم استخدام اختبار (Independent Samples t- test) لاختبار الفرض الصفري التالي: " لا يوجد فرق دال إحصائياً عند مستوي دلالة(α=0.05) بين متوسطي درجات تلاميذ المجموعتين التجريبية والمقارنة على اختبار الفهم الجبري". ويعرض جدول (٥) ملخصاً لهذه النتائج.

جدول (٥) نتائج اختبار ت للمقارنة بين متوسطي المجموعتين التجريبية والمقارنة على اختبار الفهم الجبري بعدياً

Independent Samples t - test									
Algebraic Understanding Test	Levene's Test for Equality of Variances		t-test for Equality of Means						
	F	Sig.	t	df	Sig. (2-tailed)	Mean .Dif	Std. Error .Dif	95% Confidence Interval of the Difference	
								Lower	Upper
Equal variances assumed	12.45	.001	28.32	88	.000	63.81	2.25	59.33	68.29
Equal variances not assumed			29.1	68.5	.000	63.82	2.19	59.44	68.19

- يتبين من نتائج اختبار ليفين قبول فرضية عدم التجانس حيث ان(sig=0.001<0.05) ومن ثم يتم قراءة الصف الثاني Equal variances not assumed.
- تشير نتائج الجدول السابق الي فروق ملحوظة بالنسبة لاختبار الفهم الجبري بين متوسطي المجموعتين التجريبية والمقارنة. حيث ان متوسط الفرق بين درجات تلاميذ المجموعتين التجريبية والمقارنة على اختبار الفهم الجبري دال احصائياً عند مستوى الدلالة ($t_{68.5}$=29.1,P=0.00 < 0.05) مما يعني رفض الفرض الصفري وقبول الفرض البديل والذي ينص على أنه " يوجد فرق دال إحصائياً عند مستوي دلالة(α=0.05) بين متوسطي درجات تلاميذ المجموعتين التجريبية والمقارنة على اختبار الفهم الجبري لصالح المجموعة التجريبية". ويرجع هذا الفارق الكبير لنجاح تأثير المعالجة التي تلقتها المجموعة التجريبية في تحسين بناء الفهم الجبري لدى التلاميذ في مقابل الطريقة القائمة التي تلقتها المجموعة المقارنة.

ثانيا: تحليل البيانات الخاصة بالاختبارات الثلاثة لكل مكون من مكونات الفهم الجبري.

يلخص جدول (٦) نتائج الإحصاء الوصفي لدرجات تلاميذ المجموعتين التجريبية والمقارنة على اختبارات المكونات الثلاثة للفهم الجبري (اختبار فهم المفاهيم الجبرية واختبار فهم الإجراءات الجبرية واختبار حل المشكلات الجبرية).

جدول (٦) الإحصاء الوصفي لدرجات تلاميذ المجموعتين التجريبية والمقارنة على الاختبارات الثلاثة لمكونات الفهم الجبري.

Descriptive Statistics for "three components of Algebraic Understanding"							
Components	Group	Min	Max	Mean	Std. Dev.	95% Confidence Interval for Mean	
						Lower	Upper
Algebraic Conceptual Understanding	Experimental	20	40	35.77	4.08	34.57	36.96
	Comparison	11	24	18.84	3.02	17.91	19.76
Algebraic Procedural Understanding	Experimental	15	45	36.43	7.00	34.37	38.48
	Comparison	7	24	14.28	4.12	13.01	15.54
Algebraic Problem Solving	Experimental	12	31	26.83	3.57	25.78	27.88
	Comparison	0	6	2.09	1.54	1.61	2.56

يوضح جدول (٦) أنه توجد فروق ملحوظة بالنسبة للمكونات الثلاثة لاختبار الفهم الجبري. حيث ان متوسط درجات التلاميذ على اختبار فهم المفاهيم الجبرية لدى

تلاميذ المجموعة المقارنة هو (١٨,٨) بينما ارتفع مستوى الأداء لدى تلاميذ المجموعة التجريبية إلى (٣٥,٨)، وأيضا متوسط درجات التلاميذ على اختبار فهم الإجراءات الجبرية لدى تلاميذ مجموعة المقارنة هو (١٤,٣) في مقابل ارتفاع متوسط الأداء لتلاميذ المجموعة التجريبية ليصل إلى (٣٦,٤)، وكما نجد أن متوسط درجات التلاميذ على اختبار سلوك حل المشكلات الجبرية لدى تلاميذ المجموعة المقارنة هو (٢,١) بخلاف المجموعة التجريبية الذي وصل متوسط أداء تلاميذها إلى (٢٦,٨).

وللتحقق من دلالة الفروق بين متوسطي درجات تلاميذ المجموعتين التجريبية والمقارنة على الاختبارات الثلاثة لمكونات الفهم الجبري تم استخدام اختبار (Independent Samples t- test) لبيانات كل اختبار على حده، والتحقق من صحة الفروض الصفرية الثلاثة التالية:

- "لا يوجد فرق دال إحصائياً عند مستوي دلالة (α=0.05) بين متوسطي درجات تلاميذ المجموعتين التجريبية والمقارنة على اختبار فهم المفاهيم الجبرية ". حيث يعرض جدول (٧) ملخصاً لهذه النتائج.
- "لا يوجد فرق دال إحصائياً عند مستوي دلالة(α=0.05) بين متوسطي درجات تلاميذ المجموعتين التجريبية والمقارنة على اختبار فهم الإجراءات الجبرية ". حيث يعرض جدول (٨) ملخصاً لهذه النتائج.
- "لا يوجد فرق دال إحصائياً عند مستوي دلالة(α=0.05) بين متوسطي درجات تلاميذ المجموعتين التجريبية والمقارنة على اختبار سلوك حل المشكلات الجبرية ". حيث يعرض جدول (٧) ملخصاً لهذه النتائج.

جدول (٧) نتائج اختبار ت للمقارنة بين متوسطي المجموعتين التجريبية والمقارنة على اختبار فهم المفاهيم الجبرية

Independent Samples t- test									
Conceptual Understanding Test	Levene's Test for Equality of Variances		t-test for Equality of Means						
	F	Sig.	t	df	Sig. (2-tailed)	Mean .Dif	Std. Error .Dif	95% Confidence Interval of the Difference	
								Lower	Upper
Equal variances assumed	.495	.004	22.22	88	.000	16.93	.762	15.42	18.44
Equal variances not assumed			22.5	84.4	.000	16.93	.75	15.43	18.42

يتبين من النتائج التي يلخصها جدول (٧) الي ان قيمة F من اختبار ليفين دالة احصائياً بما يشير إلى قبول فرضية عدم التجانس حيث ان(sig=0.004<0.05) ومن ثم يتم قراءة الصف الثانيEqual variances not assumed. كما يتبين من الجدول ان متوسط الفرق بين درجات تلاميذ المجموعتين التجريبية والمقارنة على اختبار فهم المفاهيم الجبرية دال احصائياً عند مستوى الدلالة $t_{84.4}=22.5, P=0.00 <$ (0.05)مما يعني رفض الفرض الصفري وقبول الفرض البديل والذي ينص على أنه " يوجد فرق دال إحصائياً عند مستوي دلالة(α=0.05) بين متوسطي درجات تلاميذ المجموعتين التجريبية والمقارنة على اختبار فهم المفاهيم الجبرية لصالح المجموعة التجريبية". ويرجع هذا الفارق الجوهري لنجاح تأثير المعالجة التي تلقتها المجموعة التجريبية في تحسين بناء فهم المفاهيم الجبرية لدى التلاميذ في مقابل الطريقة القائمة التي تلقتها المجموعة المقارنة.

جدول (٨) نتائج اختبار ت للمقارنة بين متوسطي المجموعتين التجريبية والمقارنة على اختبار فهم الإجراءات الجبرية

Independent Samples t- test									
Procedural Understanding Test	Levene's Test for Equality of Variances		t-test for Equality of Means						
	F	Sig.	t	df	Sig. (2-tailed)	Mean .Dif	Std. Error .Dif	95% Confidence Interval of the Difference	
								Lower	Upper
Equal variances assumed	8.79	.004	18.06	88	.000	22.15	1.23	19.71	24.58
Equal variances not assumed			18.46	75.52	.000	22.15	1.19	19.76	24.54

يتبين من النتائج التي يلخصها جدول (٨) الي ان قيمة F من اختبار ليفين دالة احصائياً بما يشير إلى قبول فرضية عدم التجانس حيث ان(sig=0.004<0.05) ومن ثم يتم قراءة الصف الثانيEqual variances not assumed. كما يتبين من الجدول ان متوسط الفرق بين درجات تلاميذ المجموعتين التجريبية والمقارنة على اختبار فهم الإجراءات الجبرية دال احصائياً عند مستوى الدلالة $t_{75.5}=18.46, P=0.00 <$ (0.05) مما يعني رفض الفرض الصفري وقبول الفرض البديل والذي ينص على أنه " يوجد فرق دال احصائياً عند مستوي دلالة(α=0.05) بين متوسطي درجات تلاميذ المجموعتين التجريبية والمقارنة على اختبار فهم الإجراءات الجبرية لصالح المجموعة التجريبية". ويرجع هذا الفارق الجوهري لنجاح تأثير المعالجة التي تلقتها

المجموعة التجريبية في تحسين بناء فهم الإجراءات الجبرية لدى التلاميذ في مقابل الطريقة القائمة التي تلقتها المجموعة المقارنة.

جدول (٩) نتائج اختبار ت للمقارنة بين متوسطي المجموعتين التجريبية والمقارنة على اختبار سلوك حل المشكلات الجبرية

Independent Samples t- test									
Problem Solving Test	Levene's Test for Equality of Variances		t-test for Equality of Means						
	F	Sig.	t	df	Sig. (2-tailed)	Mean .Dif	Std. Error .Dif	95% Confidence Interval of the Difference	
								Lower	Upper
Equal variances assumed	8.63	.004	42.03	88	.000	24.74	.588	23.57	25.91
Equal variances not assumed			43.35	63.78	.000	24.74	.571	23.59	25.88

يتبين من النتائج التي يلخصها جدول (٩) الي ان قيمة F من اختبار ليفين دالة احصائياً بما يشير إلى قبول فرضية عدم التجانس حيث ان(sig=0.004<0.05) ومن ثم يتم قراءة الصف الثانيEqual variances not assumed. كما يتبين من الجدول ان متوسط الفرق بين درجات تلاميذ المجموعتين التجريبية والمقارنة على اختبار سلوك حل المشكلات الجبرية دال احصائياً عند مستوى الدلالة $t_{63.8}$=43.4, (P=0.00 < 0.05) مما يعني رفض الفرض الصفري وقبول الفرض البديل والذي ينص على أنه " يوجد فرق دال احصائياً عند مستوي دلالة(α=0.05) بين متوسطي درجات تلاميذ المجموعتين التجريبية والمقارنة على اختبار سلوك حل المشكلات الجبرية لصالح المجموعة التجريبية". ويرجع هذا الفارق الجوهري لنجاح تأثير المعالجة التي تلقتها المجموعة التجريبية في تحسين بناء سلوك حل المشكلات الجبرية لدى التلاميذ في مقابل الطريقة القائمة التي تلقتها المجموعة المقارنة.

مناقشة نتائج البحث وتفسيرها:

خلصت نتائج البحث الي ما يلي:

- أن لبيئة التعلم الصفية المستندة إلى توظيف نموذج فان دي وال للتمثيلات الرياضية أثر جوهري فعال في ترقية بناء الفهم الجبري لدى تلاميذ الصف الثاني الإعدادي مقارنة بالبيئة الصفية المستندة على طرق التعلم القائمة؛ حيث تم تقديم أنشطة تعلم صفية متنوعة فتتيح للتلاميذ ممارسة سلوكيات الفهم الجبري متضمنه المكونات الثلاث للفهم. وقد أسهمت تلك الأنشطة في

تحسين معتقدات التلاميذ نحو الرياضيات وذلك بدمج المشكلات الحياتية في التعلم ليدرك التلاميذ قيمة الرياضيات ويقدرها في حياته.

- تفوق تلاميذ المجموعة التجريبية على تلاميذ المجموعة المقارنة في اختبار الفهم الجبري ويرجع ذلك لما وفرته المعالجة من ممارسات وأنشطة صفية توظف التمثيلات الرياضية داعمه لبناء الفهم الجبري وتعدد التمثيلات الرياضية المختلفة والتي تتلاءم مع جميع أنماط تعلم التلاميذ المختلفة بما يتناسب مع متطلبات تعلمه وفقا لخصائصه ووسائل التقويم المتعددة والتي تنوعت بين بطاقات التقييم الذاتي وبطاقات التفكير في الأهداف وملفات الإنجاز التي ساعدت التلاميذ في ترسيخ فكرة التقييم الذاتي والوقوف على مستواهم بأنفسهم وتحمل كل تلميذ مسئولية تعلمه ورغبته في التعلم والتأكيد على التعلم من أجل الفهم كمبدأ راسخ لا مفر منه.
- خلال فترة التطبيق نجح التلاميذ شيئا فشيئا من تخطي الصعوبات التي تعيق تعلمهم ومحاولتهم في الارتقاء ببناء الفهم الجبري وتحسنهم التدريجي الملحوظ في مكونات الفهم الجبري الثلاث، حيث أتاحت التمثيلات الرياضية التي بنيت عليها بيئة التعلم الصفية ملاءمتها لجميع التلاميذ بالفصل، وتطور ملحوظ في فهم المفاهيم الجبرية وربطها بالإجراءات وحل المهام وتوظيف كلاهما في حل المشكلات المألوفة وغير المألوفة والتي تمس جانب من حياة التلميذ لما كان له أثر واضح في ترقية حل المشكلات الجبرية واتخاذ قرار حول التمثيل المناسب الذي يساعده في حل المشكلة.
- اتفقت نتائج البحث الحالي مع نتائج العديد من الدراسات والبحوث ومنها: (Yeo, 2021)، (Nada & Prabawanto, 2020)، (D'angelo & Iliev, 2012) على التركيز على الجبر باعتباره مفتاح النجاح في المراحل المتقدمة من الدراسة، ودمج الفهم بمكوناته الثلاث باعتبارها مطلبا أساسيا لبناء الفهم الجبري عند التلاميذ فبدلا من أن يكون تعلمه موجها إجرائيا تخطى ذلك لدمج المعرفة المفاهيمية بالإجراءات المنوطة وانعكس كلاهما على نقله إلى مشاكل جبرية حياتية. وكما اتفقت نتائج البحث الحالي مع العديد من الدراسات والبحوث ومنها: (Jeffes et al., 2013)، (Stein & Smith)، (Sa'dijah et al., 2018) في الحاجة الملحة الي تركيز الطالب على التحول من منظور إجرائي لعمليات العد والعلاقات لفهم جوانبها الهيكلية ونقل كلاهما إلى مشاكل سياقات العالم الحقيقي. فالتمثيلات الرياضية من أهم خطوات التعلم التي يتخذها التلاميذ لتعزيز تعلمهم والتحكم فيه من خلال تطوير بناء الفهم الجبري وزيادة الثقة والتحفيز في عملية التعلم مما تعمل

على تحمل التلاميذ مسئولية تعلمهم وتعزيز مستويات التعلم الذاتي لتحقيق التعلم ذو معنى وتعميق شعار "التعلم من أجل الفهم".

- واتفقت أيضاً نتائج البحث الحالي مع العديد من الدراسات والبحوث وكان من أهمها:(Lin et al., 2013)، ووزارة تعليم أونتاريو (Ontario ministry of education, 2016) على أن التمثيلات الرياضية لها أثر فعال وإيجابي في تحسين بناء الفهم الجبري لدي التلاميذ. فالتمثيلات الرياضية من أهم خطوات التعلم التي يتخذها التلاميذ لتعزيز تعلمهم والتحكم فيه من خلال تطوير بناء الفهم الجبري وزيادة الثقة والتحفيز في عملية التعلم مما تعمل على تحمل التلاميذ مسئولية تعلمهم وتعزيز مستويات التعلم الذاتي لتحقيق التعلم ذو معنى وتعميق مبدأ التعلم من أجل الفهم.

التوصيات ومقترحات بحوث مستقبلية:

أشارت معايير الجمعية الوطنية لمعلمي الرياضيات NCTM إلي أن التمثيلات الرياضية باعتبارها أحد معايير العملية الأساسية، وقد أكدت نتائج هذا البحث على هذا التوجُه، حيث تبين من نتائجها أن التمثيلات الرياضية هي أحد مظاهر قوة الرياضيات والتي من خلالها تتعدد الطرق التي يمكن بها تمثيل المفاهيم والعمليات الرياضية ، وأيضا المواقف التي تستخدم الرياضيات في حلها. حيث تعد التمثيلات وسيلة قوية لتحقيق الفهم العميق والتعلم ذو معني والارتقاء بمكونات الفهم الجبري والاحتفاظ بالتعلم القائم على الفهم. واستنادا على نتائج هذا البحث يمكن الإشارة إلى مجموعة من التوصيات تتمثل فيما يلي:

- خلق بيئة تعلم صفية تسودها ثقافة "التعلم من أجل الفهم" لضمان استناد التعلم على خلفية صلبة متماسكة لتعلم المفاهيم والعلاقات الرياضية مما يجعله يستسيغ مادة الرياضيات ويقدرها ويكتسب قدرة متزايدة للتفكير فيها بصورة استقلالية وضمان أعلى درجة ممكنة من مشاركته الفعالة داخل الصف وزيادة رغبته في التعلم.
- تطوير الممارسات التدريسية لدى المعلمين بُغية الوصول بهم إلى التدريس الفعال ذي المعنى والتأكيد على التعلم من أجل الفهم وليس مجرد اجتياز الاختبارات، إتاحة الفرص للتلاميذ لحوارات صفية فعالة، اشتراك التلاميذ في تقويم أنفسهم وتطوير مهارات التقويم الذاتي. دعم المنهج بالمشكلات الحياتية ذات السياق لتقدير أهمية الرياضيات وترقية مهارات التفكير العليا لدى التلاميذ.
- تزويد المعلمين بإطار عن مكونات الفهم الجبري وضرورة دمجها في مناهج الرياضيات وتقديم دورات تدريس للمعلمين بكيفية إدخال الجبر في مراحل مبكرة في التعليم الأساسي.

- مراعاة المعلمين صياغة مؤشرات سلوكيات الفهم الجبري بلغة التلاميذ الخاصة والتنويه دائما إلى توظيف كلا من المعرفتين المفاهيمية والإجرائية لحل مشاكل ذات سياقات حياتية.
- تشجيع التلاميذ على طرح أنواع مختلفة من التساؤلات حول محتوي التعلم، واستخدام التساؤلات في تكوين بيئات تعلم خصبة بالحوارات الصفية ذات المعنى مما يدعم الفهم العميق ذو معنى.
- إضافة المشكلات الحياتية للجبر بصورة كبيرة لربط الرياضيات بالحياة الواقعية مما يحفز التلاميذ لدراستها وتقدير أهميتها في حياتهم اليومية.
- عقد دورات تدريبية لمعلمي الرياضيات لتدريبهم على كيفية استخدام التمثيلات الرياضية وكيفية تصميم أنشطة ومصادر للتعلم.
- تزويد المعلمين بإطار عن مكونات الفهم الجبري الثلاث وأهمية دمجها في منهج الرياضيات ككل متكامل وخاصة في مراحل التعليم المتوسط.
- تقديم دورات تدريبية لرفع كفاءة المعلمين في مهارات التدريس الفعال والاعتماد على المصادر العالمية وخاصة التي يقدمها المجلس القومي لمعلمي الرياضيات.
- من المتوقع أن تختلف خصائص تلاميذ المرحلة الإعدادية عن تلاميذ المرحلة الابتدائية والثانوية بسبب المعارف الرياضية المختلفة التي يدرسونها، وكذلك مستويات النمو المعرفي، وبالتالي يمكن اقتراح دراسة تقوم على تحديد شكل مختلف للنموذج الإجرائي المنبثق من التمثيلات الرياضية لتتلاءم مع مراحل دراسية أخرى.
- إجراء المزيد من الدراسات والبحوث التي قد تساعد على تشخيص وعلاج ضعف ممارسات التلاميذ لسلوكيات الفهم الجبري من المراحل الدراسية المختلفة.
- إجراء دراسة تستهدف إعداد برنامج تنمية مهنية للمعلمين وذلك لتأهيلهم لتوظيف سلوكيات الفهم الجبري وترقيته.

المراجع العربية:

رمضان بدوي (٢٠٠٣). *استراتيجيات في تعليم وتقويم تعلم الرياضيات*. دار الفكر.

رمضان بدوي (٢٠٠٨). *تضمين التفكير الرياضي في برامج الرياضيات* . دار الفكر.

يوسف الإمام (٢٠٠٥). *التقويم الفعّال: التحول من ثقافة الاختبار إلى ثقافة التقويم*. المؤتمر العلمي الخامس للجمعية المصرية لتربويات الرياضيات، كلية التربية،جامعة بنها، مصر، ١٠٣-١٩٣ .

المراجع الأجنبية:

Budé, L. (2007). *On the improvement of students' conceptual understanding in statistics education*.

Cummings, K. (2015). How Does Tutoring to Develop Conceptual Understanding Impact Student Understanding?

D'angelo, F., & Iliev, N. (2012). Teaching Mathematics to Young Children through the Use of Concrete and Virtual Manipulatives. *Online Submission*.

Delice, A., & Sevimli, E. (2010). An Investigation of the Pre-Services Teachers' Ability of Using Multiple Representations in Problem-Solving Success: The Case of Definite Integral. *Educational Sciences: Theory and Practice, 10*(1), 137-149.

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 61*(1), 103-131.

El-Emam, Y. (2005). *Effective Assessment: A key for Effective Teaching and Instruction. Paper presented at the First Annual Middle East Teachers of Science, Mathematics and Computing (METSMaC-1) Conference 26-28 .*
*https://www.researchgate.net/publication/313794810_*

Fennell, F., & Rowan, T. (2001). Representation: An important process for teaching and learning mathematics. *Teaching Children Mathematics, 7*(5), 288-292.

Gagatsis, A., Panaoura, A., Deliyianni, E., & Elia, I. (2010). STUDENTS'BELIEFS ABOUT THE USE OF REPRSENTATIONS IN THE LEARNING OF FRACTIONS. *CERME 6–WORKING GROUP*, 64.

Gavin, M. K., & Sheffield, L. J. (2015). A balancing act: Making sense of algebra. *Mathematics Teaching in the Middle School, 20*(8), 460-466.

Germain-McCarthy, Y., & Gill, I. (2014). Bringing the Common Core Math Standards to Life: Exemplary Practices from Middle Schools (2 ed.). *New York: Routledge & Taylor Francis*.

Gibson, J. (Producer). (2015, May 13). Why Learn Algebra? *Math Goodies* Retrieved from http://www.mathgoodies.com/articles/why_learn_algebra.html

Greenes, C. (2008). *Algebra and Algebraic Thinking in School Math: NCTM's 70th YB*: the National Council of Teachers of Mathematics.

Hull, H., Balka, S., & Miles. H. (2011). *Visible Thinking in the K 8 Mathematics Classroom*: Corwin Press.

Jeffes, J., Jones, E., Wilson, M., Lamont, E., Straw, S., Wheater, R., & Dawson, A. (2013). Research into the impact of Project Maths on student achievement, learning and motivation. *Slough: National Foundation for Educational Research*, 1-72.

Kieran, C. (2011). Overall Commentary on Early Algebraization: Early algebraization: A global dialogue from multiple perspectives. . In *Early algebraization: A global dialogue from multiple perspectives* (pp. 579-583).

Kilpatrick, S., Bradford، F. (2001). *Adding It Up: Helping Children Learn Mathematics*. Washington: National Academy of Sciences.

Lin, Y.-H., Wilson, M., & Cheng, C.-L. (2013). An investigation of the nature of the influences of item stem and option representation on student responses to a mathematics test. *European journal of psychology of education, 28*(4), 1141-1161.

Mark, J, Goldenberg, E. P., Fries, M., & June, K. M. (2014). Transition to Algebra. *The National Science Foundation & The Education Development Center*.

Nada, Y., & Prabawanto, S. (2020). *Characteristics of students' mathematical representation in solving algebraic thinking problems.* Paper presented at the Journal of Physics: Conference Series.

NCTM. (2000). Principles and Standards for school mathematics. *The National Council of Teachers of Mathematics(nctm)*.

NCTM. (2014). Procedural Fluency In Mathematics. *the National Council of Teachers of Mathematics*.

Sa'dijah, C., Muksar, M., & Anwar, L. (2018). *Teachers' Representation in Solving Mathematical Word Problem.* Paper presented at the Proceedings of the 2nd International Conference on Education and Multimedia Technology.

Stein, K., & Smith, M. Practices for orchestrating productive mathematics discussions. *Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics*.

Van de Walle, J., Karp, K., & Bay-Williams, J. (2013). Teaching Mathematics for understandng. In *Elementary and Middle School Mathematics: Teaching Developmentally, 8th Edition*: Pearson.

Windsor, W. (2010). *Algebraic Thinking: A Problem Solving Approach*.: MERGA.

Yeo, J. (2021). Learning Opportunities to Promote Conceptual Understanding in Singapore Secondary School Mathematics Instruction. In *Mathematics Instructional Practices in Singapore Secondary Schools* (pp. 63-77): Springer.